GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 1 1 OCTOMVRIE 1939

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAŢIUNII"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 1 — 1 OCTOMVRIE 1939

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

PERSONALUL REDACŢIUNII «SUPLIMENTULUI CU EXERCIŢII»

O. N. ŢINO. Membru delegat pentru coordonarea exerciţiilor propuse.

C. IONESCU-BUJOR. Membru delegat pentru soluţiunile de publicat, imprimarea revistei şi corecturi.

LT. C. IONESCU-ŢIU. Membru delegat pentru repartizarea exerciţiilor rezolvate.

D-RA PREDUŢA BUNGEŢIANU, EM. BOTEA şi N. N. MIHĂILEANU. Membri delegaţi pentru alcătuirea tabloului de rezolvitori al fiecărui număr.

D-RA PREDUŢA BUNGEŢIANU, GENERAL GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, GH. DUMITRESCU, AD. GHEORGHIU, V. GHIŢESCU, TIBERIU IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, CPT. COMANDOR I. LINTEŞ, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, AL. ROŞU, GH. D. SIMIONESCU, O. N. ŢINO şi CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru exerciţii propuse şi cercetarea soluţiilor primite.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1940

Adunarea generală a Societăţii „*Gazeta Matematică*“, în şedinţa dela 31 August a. c., a hotărît ţinerea concursului tradiţional de matematici, în cursul anului 1940, între elevii liceelor civile şi militare din întreaga ţară.

Concomitent cu acest concurs se va ţine un concurs şi între elevii anului I ai Şcolii Politechnice „Regele Carol II“ din Bucureşti.

Concursul va avea loc după sărbătorile Paştelui, înainte de reînceperea cursurilor. Dacă Societatea va dispune de mijloace de

a aduce candidaţii, el se va ţine în Bucureşti, unde se va da examen scris şi oral; în caz contrar se va ţine în diferite centre din ţară, într'o Duminică din luna Mai, dându-se numai examen scris.

Deciziunea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1940.

Elevii cari doresc să candideze sunt obligaţi să se înscrie la *două din materiile de matematici ale clasei cărora aparţin*, la fiecare din aceste două materii urmând a da câte o lucrare scrisă, iar în cazul ţinerii concursului în Bucureşti şi examen oral.

Pentru unitatea pregătirii se va publica în numărul din Octomvrie a. c. al *Gazetei Matematice* un program, cu materia pe care candidaţii fiecărei clase vor trebui să o pregătească pentru obiectele la care se înscriu.

Sub nici un motiv nu se acordă candidaţilor scuze de nepregătirea unora din capitolele trecute în programul clasei lor pentru obiectele alese.

Inscrierea la concurs se face numai prin cerere individuală, scrisă personal de candidat, care se va trimete în plic recomandat cel mai târziu până la 31 Decemvrie a. c. pe adresa: *Societăţii „Gazeta Matematică". Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.*

Nu se primesc cereri trimese de părinţi, corespondenţi, profesori sau şcoli, fiecare candidat fiind obligat a-şi face singur cererea.

Pentru ca cererea de înscriere la concurs să fie luată în considerare, candidatul trebue să răspundă pe puncte, în ordinea de mai jos, la următoarele date:

1. Numele (de familie) şi pronumele.

2. Şcoala şi clasa în care urmează candidatul. (Cei pregătiţi în particular vor arăta şcoala la care au urmat în anul precedent, sau la care au depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă).

3. Adresa personală:

— în timpul şcolii,

— în timpul vacanţei de Paşte.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut în timpul concursului, sau dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea „*Gazeta Matematică*".

(Cel care are nevoe de bani pentru drum, va arăta gara de unde va lua trenul pentru a veni în Bucureşti, precum şi gara la care se înapoiază după concurs).

5. Cele două materii de matematici la care se înscrie.

6. Activitatea depusă la *Gazeta Matematică* şi *Suplimentul cu Exerciţii al Gazetei Matematice,* precum şi la alte reviste de matematici din ţară sau străinătate, arătând numărul de probleme şi exerciţii rezolvate şi publicate până în prezent.

Candidaţii înscrişi la concurs, cari din diferite motive nu mai pot sau nu mai vor să se prezinte, sunt obligaţi să anunţe din timp Societatea printr'o scrisoare.

Părăsirea sălilor de concurs, înainte de predarea lucrărilor scrise, este interzisă.

In numărul 6 din Februarie 1940 al *Gazetei Matematice* se va publica modul de ţinere al concursului, localitatea, orele de prezentare, precum şi numele tuturor candidaţilor admişi să ia parte la concurs.

Numărul celor admişi va depinde de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică* pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia vor arăta-o şi dovedi în cererile ce vor face.

Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni.

Primul reuşit dintre toţi candidaţii liceelor va primi premiul «LT.-COL. G. TĂNĂSESCU», în cărţi, conform celor arătate în acest număr la articolul: *Premii, burse şi publicaţii din fondurile speciale ale Societăţii „Gazeta Matematică“.*

Primul reuşit dintre elevii anului I al Şcolii Politehnice „Regele Carol II“ din Bucureşti va primi premiul «ANGHEL SALIGNY» (de 1000 lei) oferit de un membru al Societăţii noastre.

Comisiunea examinatoare se va compune din membri ai Societăţii *„Gazeta Matematică“*, care nu vor avea rude sau elevi printre candidaţi.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

EXERCIȚII REZOLVATE

Clasa III-a. *Exerc. 70. Să se arate că raportul suprafețelor a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul patratelor bisectoarelor unghiurilor egale.*

V. Gh.

Fie S_1S'; a, b, c, a', b', c'; AA_1, $A'A_1$ respectiv suprafețele, laturile, bisectoarele a două triunghiuri asemenea ABC și A'B'C'.

Triunghiurile ABA_1, $A'B'A_1'$ și ACA, $A'C'A_1'$ sunt două câte două asemenea, având câte două unghiuri egale. Rezultă:

$$\frac{\text{sup.}ABA_1}{\text{sup.}A'B'A_1'} = \frac{\overline{AA_1^2}}{\overline{A'A_1'^2}} \quad \text{și} \quad \frac{\text{sup.}ACA_1}{\text{sup.}A'C'A_1'} = \frac{\overline{AA_1^2}}{\overline{A'A_1'^2}}.$$

Deci:

$$\frac{\text{sup.}ABA_1 + \text{sup.}ACA_1}{\text{sup.}A'B'A_1' + \text{sup.}A'C'A_1'} = \frac{S}{S'} = \frac{\overline{AA_1^2}}{\overline{A'A_1'^2}} = \frac{\overline{BB_1^2}}{\overline{B'B_1'^2}} = \frac{\overline{CC_1^2}}{\overline{CC_1'^2}}.$$

Clasa V-a. *Exerc. 443. Pe latura* AC *a triunghiului* ABC *se consideră punctele* E *și* F *astfel ca* $AE = EF = FC$. *Pe latura* BC *se ia punctul* M *astfel ca* $CM = \frac{1}{4}BC$, *iar intersecția paralelei dusă prin* A *la* BC *cu dreapta* BE *o notăm cu* D. *Paralela dusă prin* C *la* AB *întâlnește pe* AD *în* N. *Se cere:*

1°. *Să se arate că dreapta ce unește mijlocul laturii* AB *cu punctul* N *trece prin* E, *iar dreapta* DM *trece prin* F.

2°. *Să se afle raportul în care dreapta* BF *împarte segmentul* CD.

G. D. S.

ABCN fiind paralelogram, BN întâlnește pe AC în mijlocul său O. Să notăm cu G mijlocul laturii BC, iar cu H și I punctele unde NE și BF întâlnesc pe CD.

1°. $OE = \frac{\overline{AE}}{2}$ și deoarece AO este mediană în triunghiul ABN, rezultă că E este punctul de întâlnire al medianelor. Atunci NE trece prin mijlocul laturii AB.

BE fiind şi ea mediană, D va fi la mijlocul lui AN, deci DG trece prin O. Repetând raţionamentul de mai sus se arată că în triunghiul DGC DF este mediană şi trece prin mijlocul lui GC adică prin M.

2⁰. NE şi BF sunt paralele, iar $\overline{EF} = \overline{FC}$ ceeace arată că $\overline{HI} = \overline{IC}$. Apoi BD fiind mediană în triunghiul ABN avem: $\overline{BE} = 2\,\overline{ED}$ care ne dă

$$\overline{HI} = 2\,\overline{HD}. \text{ Rezultă: } \frac{\overline{IC}}{\overline{ID}} = \frac{2}{3}.$$

V. 487. Fie B′ *şi* A′ *respectiv mijloacele laturilor* AC *şi* BC *din triunghiul* ABC. *Cercul ce trece prin* A_1B' *şi* A′ *taie latura* AB *în* F. *Să se calculeze, în funcţie de laturile triunghiului, segmentul* BF.

G. D. S.

Cercul AB′A′ taie latura BC a doua oară în E. Presupunând $\overline{BC} > \overline{AC}$ şi făcând notaţia obişnuită: $\overline{BC} = a$; $\overline{CA} = b$; $\overline{AB} = c$. Scriem puterea punctului C faţă de cerc:

$$\overline{CB'} \times \overline{CA} = \overline{CA'} \times \overline{CE} \quad \therefore \quad \overline{CE} = \frac{b^2}{a}.$$

Rezultă:

$$\overline{BE} = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

Puterea punctului B faţă de cerc ne dă:

$$\overline{BE} \times \overline{BA'} = \overline{BF} \times \overline{BA} \quad \therefore \quad \overline{BF} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a} \times \frac{a}{2}}{c} = \frac{a^2 - b^2}{2C}.$$

V. 500. Fie A′ *piciorul înălţimei* AA′ *în triunghiul* ABC *dreptunghic* A. *Să se demonstreze că dacă* $\overline{AB} = \overline{A'C}$, *atunci* $\overline{AB}$ *este egală cu latura decagonului stelat înscris în cercul de rază* $\overline{A'B}$ *şi reciproc.*

Gh. B.

Se ştie că într'un triunghiu dreptunghiu avem

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \times \overline{A'B} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \overline{AB}^2 = (\overline{A'B} + \overline{A'C}) \times \overline{A'B}$$

sau înlocuind pe $\overline{A'C}$ prin $\overline{AB}$ şi făcând calculele

$$\overline{AB}^2 - \overline{A'B} \times \overline{AB} - \overline{A'B}^2 = 0 \qquad (2)$$

pe care rezolvind-o în raport cu $\overline{AB}$ obţinem

$$\overline{AB} = \frac{\overline{A'B}\,(1 \pm \sqrt{5})}{2}. \qquad (3)$$

Din punct de vedere geometric, numai valoarea pozitivă este admisibilă. Dar se ştie că latura decagonului stelat înscris în cercul de rază R este

$$L_{10} = \frac{R\,(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

Comparând această valoare cu (3) avem proprietatea din enunţ. Reciproc de la (3) se ajunge la (2) şi apoi la (1). La fel se rezolvă exerciţiul cl. V. 501.

Clasa VI-a. *Exerc. 477. Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin^3 x = \sin(A - x)\sin(B - x)\sin(C - x)$$

A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu.*

G. D. S.

Avem:

$$\sin^3 x = (\sin A\cos x - \cos A\sin x)(\sin B\cos x - \cos B\sin x) \times$$
$$(\sin C\cos x - \cos C\sin x) = \sin A\sin B\sin C\cos^3 x$$
$$-(\Sigma \sin A\sin B\cos C)\cos^2 x\sin x + (\Sigma \sin A\cos B\cos C)$$
$$\sin^2 x\cos x - \cos A\cos B\cos C\sin^3 x.$$

Se ştie însă că:

(1) $$\Sigma \sin A\cos B\cos C = \sin A\sin B\sin C$$

şi

(2) $$\Sigma \cos A\sin B\sin C = 1 + \cos A\cos B\cos C.$$

Ţinând seama de aceste relaţii ecuaţia devine:

$$\sin^3 x = \sin A \sin B \sin C \cos x - \cos A \cos B \cos C \sin x - \sin x \cos^2 x$$

$$\therefore \quad \sin x = \sin A \sin B \sin C \cos x - \cos A \cos B \cos C \sin x$$

$$\therefore \quad \cot x = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C} = \cot A + \cot B + \cot C.$$

Unghiul x se numeşte unghiul lui BROCARD.

Clasa VII-a. *Exerc. 388. Să se determine umbra aruncată pe planul de proiecţie de un segment*

$$\overline{AB}\ [A\,(6,\ 7,\ 2);\ B\,(10,\ 1,\ 10)]$$

luminat de un izvor luminos L (2, 3, 5).

V. GH.

Reprezentăm în epură punctele A, B şi L. Căutăm urmele dreptelor LA şi LB. In cazul problemei de faţă, umbra segmentului AB este cuprinsă în întregime în planul orizontal anterior şi nu se ridică pe verticalul superior. Această umbră este, în adevărată mărime, segmentul 00_1, 0 şi 0_1 fiind urmele orizontale ale dreptelor LA şi LB.

VII. 396. Să se construiască proiecţiile unui pătrat ABCD *situat într'un plan ce trece prin linia de pământ, ale cărui laturi opuse* AB *şi* DC *sunt frontoorizontale, cunoscând proiecţiile centrului său* O *precum şi adevărata mărime* l *a diagonalei pătratului.*

V. GH.

Rabatem planul pătratului pe planul orizontal. Fie O_1 rabaterea lui O. Construim pătratul în adevărată mărime, rabătut $A_1B_1C_1D_1$, cunoscând poziţia centrului său, diagonala şi având laturile lui A_1B_1 şi C_1D_1 paralele cu linia de pământ.

Ridicăm apoi din rabatere punctul M_1, mijlocul lui A_1B_1. Acest punct ridicat în proiecţie fiind (m', m) ducem prin el frontoorizontala $(a'b', ab)$ de lungime cât A_1B_1.

Proiecţiile celorlalte vârfuri ale pătratului le obţinem prin simetrii faţă cu (0', 0).

VII. 397. Fiind dat un unghiu din spaţiu XAY *prin proiecţiile sale* (*x'a'y'*, *xay*), *să se construiască proecţiunile bisectoarei acestui unghiu.*

V. GH.

Luăm în epură un unghiu XAY. Ducem la acest unghiu o secantă după voie, BC. Determinăm apoi geometriceşte punctele *m* (interior) şi *n* (exterior) cari împart proiecţia orizontală *bc* într'un raport egal cu acela al segmentelor AB şi AC, a căror adevărată mărime o aflăm în prealabil. Punctele obţinute *m* şi *n* le urcăm în proiecţie verticală. Bisectoarele obţinute sunt (*am*, *a'm'*) interioară şi (*an*, *a'n'*) exterioară.

Toate clasele. *Exerc. 210. Să se găsească* $(2p+1)$ *numere întregi consecutive a căror sumă să fie divizibilă prin numărul întreg* $(2p+2q+1)$.

GH. B.

Se ştie că suma primelor n numere întregi consecutive este

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Fie

$$a+1\ ;\ a+2;\ldots;\ a+2p+1$$

numerele căutate. Suma lor va fi

$$S=(2p+1)a+\frac{(2p+1)(2p+1+1)}{2}=(2p+1)(a+p+1)$$

sau

$$S=(2q+2p+1-2q)(a+p+1)$$

$$=(2q+2p+1)(a+p+1)-q(a+p+1).$$

Trebue deci determinat a aşa fel ca $q(a+p+1)$ să fie divizibil prin $2p+2q+1$ adică trebue ca

$$q(a+p+1)=m(2p+2q+1 \qquad (1)$$

m fiind întreg. Din (1) se scoate

$$a+p+1=\frac{2qm+(2p+1)m}{2q} \qquad (2)$$

care arată că m este pereche. Fie $m=2t$. Din (2) se scoate

$$a+p+1=\frac{2qt+t(2p+1)}{q} \qquad (3)$$

care arată că $t(2p+1)$ trebue să se dividă prin q. Având date numerele p şi q se pot găsi cu uşurinţă o infinitate de numere t, astfel ca $t(2p+1)$ să se dividă prin q. Unul din acele numere t introdus dă valori pentru a şi deci pentru şirul de $2p+1$ numere căutate.

Dacă $2p+1$ se devide prin q atunci şi $t=1$ dă o soluţie a problemei.

T. C. 211. Să se arate că nu există două numere N_1 *şi* N_2 *astfel ca* N_1 *adunat cu suma cifrelor să dea pe* N_2, *iar* N_2 *adunat cu suma cifrelor să dea pe 1939.*

GH. B.

Fie s_1 şi s_2 respectiv suma cifrelor lui N_1 şi a lui N_2. Să căutăm întâi dacă există numere N_2 aşa în cât

$$N_2+s_2=1939.$$

Observăm că $N_2>999$ căci dacă

$$N_2=999 \quad \text{atunci} \quad 999+3\times 9=1026<1939.$$

Deci N_2 este un număr $abcd$ de 4 cifre şi atunci

$$abcd+a+b+c+d=1939$$

$$\therefore \qquad 1001a+101b+11c+2d=1939 \qquad (1)$$

Nu se poate lua decât $a=1$ care dus în (1) dă

$$101b+11c+2d=938 \qquad (2)$$

In (2) se poate avea $b=8$ sau $b=9$.

Pentru $b = 8$, (2) devine

$$11c + 2d = 130 \qquad (3)$$

care arată că c este pereche şi > 6. Deci $c = 8$, dar atunci (3) dă

$$2d = 42$$

care este imposibilă căci d este număr de o cifră.

Pentru $b = 9$ procedând la fel se găseşte că (2) dă

$$c = 1 \quad \text{şi} \quad d = 9.$$

Deci *există un număr* N_2, şi anume 1919, *care adunat* cu suma cifrelor lui dă o sumă egală cu 1939.

Să examinăm dacă există un număr N_1 aşa încât

$$N_1 + s_1 = 1919.$$

Procedând ca la cazul precedent se găseşte din aproape în aproape că N_1 este un număr de 4 cifre $a'b'c'd'$, că a' ar putea fi 1, b' ar putea fi 8 sau 9, dar că pentru aceste valori nu se găsesc valori întregi de o cifră pentru c' şi d' aşa încât

$$a'b'c'd' + a' + b' + c' + d' = 1919.$$

Până la 5 Septemvrie s'au primit soluţiuni bune pentru exerciţiile publicate în numerele 7 şi 8 şi 9 dela[1]):

Şcoala Centrală de fete Bucureşti.

Clasa III-a: Caţafani V. Andreia (III : 88, 89). — *Clasa IV-a:* Georgescu T. Mariana (IV : 437, 8, 42, 4, 51), Stănescu S. Mirela (IV : 436, 42, 3).

Liceul de fete „Carmen-Sylva" Bucureşti.

Clasa IV-a: Mihăescu Ileana (IV : 413), Silber Kaspy (IV : 451). *Clasa V-a:* Vasilescu O. Alexandra (V : 509).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa IV-a: Iliescu G. Veroniga (IV : 451*).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Liceul de fete Bacău.

Clasa VII-a: Papadopol D. Elena (VII: 423, 6).

Liceul de fete „Regina Maria" Cluj.

Clasa V-a: Nimberger Martha (V: 520).

Liceul de fete Focșani.

Clasa III-a; Rădulescu T. Teodora (III: 73*, 5).

Liceul de fete „Oltea Doamna" Iași.

Clasa IV-a; Moisei Elisa (IV: 435).

Liceul de fete „Carmen-Sylva" Timișoara.

Clasa VII-a: Adler L. Edith (VII: 438), Domoncos O. Erika (VII: 418, 26, 33, 4, 8, T. c.: 222), Ungar A. Veronica (VII: 412).

Liceul „Spiru Haret" București.

Clasa VII-a; Guralivu St. E. (VII: 394, 405, 6, 8, 13, 4, 5, 30, 8, T. c.: 226), Racoviceanu V. (VII: 408).

Liceul „Gh. Lazăr" București.

Clasa VI-a: Andonie C. G. (VI: 501, 2, 8, 11, 4*), Moscovici I. N. (VI: 501, 2, 10), Nicolau G. C. (VI: 486, 8*, 9*, 93).

Liceul „Mihaiu Viteazu" București.

Clasa IV-a: Voinea G. M. (IV: 425, 34, 6*).

Colegiul Național „Sf. Sava" București.

Clasa VI-a: Ciurescu I. F. (VI: 484, 501, 2, T. c.: 215, 6, 7).

Liceul „Aurel Vlaicu" București.

Clasa V-a: Mănescu G. I. (V: 484, 6, 7*, 8, 9, 90). — *Clasa VII-a:* Spiceanu V. M. (VII: 436, 40, 1).

Liceul „Matei Basarab" București.

Clasa IV-a: Ghelber G. A. (IV: 414, 31). — *Clasa V-a:* Vasiliev A. B. (V: 490, T. c.: 215, 6, 7).

Liceul „Titu Maiorescu" București.

Clasa IV-a: Slăvescu V. M. (IV: 424*, 6, 42, 4, 8, 5, 1). — *Clasa VI-a:* Niculescu C. M. (VI: 508, 10, 1, VII: 408*, 26). — *Clasa VII-a:* Ioan Călin (T. c.: 215, 6, 7).

Liceul „Gh. Şincai" Bucureşti.

Clasa IV-a: Constantinescu I. E. (IV: 433*, 4*, 6*, 7, 8, 9, 40, 4, 5, 7, 8, 9, 50, 1, V: 508, 19, 25), Pârvulescu V. C. (IV: 393, 434, 8, 42, 4, 8*, 51, 63*, 5), Schwartz L. I. (IV: 415, 24, 42, V: 490) — *Clasa V-a:* Cuţăr D. C. (V: 509, 22, 3, 4), Nissim M. A. (V: 484, 8, 90, 7, 9, 500, 1, 3, 4*, 7, 11, 4, 20, 5, 7, VI: 509, 10, T. c.: 215, 6, 7, 24).

Liceul „Mihail Eminescu" Bucureşti.

Clasa V-a: Aron I. G. (V: 499, 500, 1, 2, 21, 5, T. c.: 224, 5, 30). *Clasa VII-a:* Leibovici S. (VII: 440, 2), Marinescu I. (VII: 407, T. c.: 215, 6, 7).

Liceul „Marele Voevod Mihai" Bucureşti.

Clasa III-a: Pavlid V. (III: 85, 6). — *Clasa IV-a:* Bratu I. E. (IV: 442, 4, 51).

Institutul „Schewitz Thierrin" Bucureşti.

Clasa VI-a: Mărgărit I. N. (VI: 473, 5*, 86, 7, 8*, 92, 3, 4).

Liceul „Profesorii Asociaţi" Bucureşti.

Clasa VI-a: Marcusohn O. (VI: 510, VII: 426, 36, 43, 4).

Liceul „Sf. Andrei" Bucureşti.

Clasa V-a: Ganea M. (V: 484, 90).

Liceul „Moise Nicoară" Arad.

Clasa IV-a: Ardelean F. M. (IV: 434, 5, 6), Nistor I. I. (VI: 415, 26, 34*, 5*, 6*, 40, 2, 4, 51, V: 477). — *Clasa VI-a:* Luca I. I. (VI: 478*, 86, 7, 92, 510, T. c.: 187, 231, 2). — *Clasa VIII-a:* Mureşan I. O. (VIII: 317*, 8*, 20, 3, 5, 30, 2).

Liceul „Sf. Vasile" Blaj.

Clasa III-a: Balea I. (III: 82, 6, 9, 90).

Liceul „Dr. I. Meşotă" Braşov.

Clasa III-a: Dumitraşcu N. O. (T. c.: 215, 6, 7). — *Clasa V-a:* Ionescu C. F. (V: 519, 20, 5). — *Clasa VI-a:* Elöpataki E. (VI: 475). — *Clasa VII-a:* Băncilă C. A. (VII: 426).

Liceul „Andrei Şaguna" Braşov.

Clasa IV-a: Neguţ V. S. (IV: 400, 1, 25). — *Clasa V-a:* Alexandru Şt. (V: 499*, 502).

Liceul „D. Ştirbey“ Câmpina.

Clasa V-a: Bucuroiu P. A. (V: 444, 80), Cernat T. I. (V: 503) *Clasa VII-a:* Mihăilescu C. C. (T. c.: 226, 31).

Liceul „A. Pumnul“ Cernăuţi.

Clasa III-a: Timotin A. Al. (III: 79, 80, 2, 3, 6).

Liceul „Mitropolitul Silvestru“ Cernăuţi.

Clasa IV-a: Hendlinger N. (IV: 444, 8, 9), Volschi S. A. (IV: 414, 5, 7, 8, 9, 20, 49).

Liceul militar „Ştefan cel Mare“ Cernăuţi.

Clasa III-a: Cândea S. (III: 86, T. c.: 215, 6, 7), Gaius T. (T. c.: 216), Georgescu T. (T. c.: 215), Huţu C. (III: 89), Nicolaescu I. I. (III: 86, 9, 90, 1*, T. c.: 202, 15, 7), Staicu I. C. (III: 81, 6, 90, 1, 2, T. c.: 215, 7), Ţăranu G. S. III: 86, T. c.: 216), Vasiliu I. D. (III: 86, 9, 90*, 1, 2, T. c.: 215), *Clasa IV-a:* Pleşu L. (IV: 424, 42, 3, 4, 8, 9, 50, 1). — *Clasa V-a:* Diaconescu C. (V: 512), Holea T. (V: 512), Irimescu P. (V: 503, 4*), Ivan H. (V: 499, 512), Jipa N. (V: 502, 4, 12), Munteanu L. S. (V: 511, 2), Vălceanu A. (V: 512), Zavati C. (V: 499, 502, 3, 12). — *Clasa VI-a;* Ionescu N. C. (VI: 486, 502). — *Clasa VII-a:* Botez T. (VII: 426), Cotulbea I. C. (VII: 426), Dovgan I. G. (VII: 426), Petrescu V. M. (VII: 426), Suliţeanu C. (VII: 423, 4, 6).

Liceul militar „Regele Ferdinand I“ Chişinău.

Clasa III-a: Dumitrescu G. (III: 87, 8, 90), Grigoriu I. M. (III: 81, 6), Rusu V. I. (III: 80, T. c.: 215, 6, 7). — *Clasa IV-a:* Gherman A. (III: 424, 32), Herjiu G. (IV: 424), Onciu G. (IV: 424).

Seminarul Pedagogic Cluj.

Clasa VII-a: Kelemen G. (VII: 426, 31), Ribest G. (VII: 426).

Liceul „Mircea cel Bătrân“ Constanţa.

Clasa V-a: Geacomo I. (V: 474, 8, 88, 9, 90, 502, 3), Sotiriu T. (V: 484, 5, 6, 7, 90).

Colegiul Naţional „Carol I“ Craiova.

Clasa VII-a: Sandu G. I. (VII: 408*, 21, 6).

Liceul militar „D. A. Sturdza“ Craiova.

Clasa III-a: Udrea C. I. (III: 91*, T. c.: 228, 9). — *Clasa IV-a:* Stamati V. (IV: 417, 8). — *Clasa VI-a:* Săndulache A. (VI: 459). — *Clasa VIII-a:* Iordache T. (VIII: 306, 7).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa VII-a: Nicoară T. (VII: 422, 35, 8, 43, 4, VIII: 229).

Liceul „I. Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VII-a: Cherţman M. (VII: 408, 9, T. c.: 226, 8, 9), Văduva F. M. (VII: 413, 6, 24, 36, 40, T. c.: 213*, 26).

Liceul Internat „C. Negruzzi" Iaşi.

Clasa VI-a: Barbaiani A. I. (VI: 473, 80, 9*, T. c.: 215, 6, 7).— *Clasa VII-a:* Enescu I. N. (VII: 426, 7).

Liceul „Naţional" Iaşi.

Clasa IV-a: Condac P. (IV: 438). — *Clasa VI-a:* Secu E. (VI: 489*). *Clasa VII-a:* Cars M. C. (VII: 436).

Liceul militar „General Makarovici" Iaşi.

Clasa IV-a: Căruntu V. F. (IV: 424), Coslovschi M. (IV: 424), Gheorghe T. (IV: 424), Horceag I. M. (IV: 424), Iftode I. C. (IV: 424), Mateescu M. G. (IV: 424), Milea I. C. (IV: 424), Palade I. M. (IV: 418, 24), Puchin I. G. (IV: 415, 8, 24), Sburlan D. C. (IV: 424). — *Clasa V-a:* Drăghicescu P. (V: 504, 7*, 9*). — *Clasa VII-a:* Cârdeiu D. G. (VII: 421), Constantin P. (VII: 421, 34), Gheorghiu P. A. (VI: 434, 86, 7, 91), Jiletcovici A. (VII: 421), Lăbuşcă I. (IV: 486, 91), Popa D. M. (VII: 421, 4), Pascaru I. C. (VII: 426, 30).

Liceul militar „N. Filipescu" Mânăstirea Dealu.

Clasa IV-a: Stoianovici Ş. (IV: 435, 6, V: 508, 11). — *Clasa V-a:* Aldea V. V. (V: 499, 511), Arendt E. (V: 463, 4, 5, 9, 70, 5, 6, VIII: 306), Floreşteanu A. (V: 508*, T. c.: 225), Hristescu I. (V: 480, 9, 99, 503, VIII: 306), Ionescu-Berechet F. A. (V: 462, 7, 75, 82, 8, 9*). — *Clasa VI-a:* Bârlea Suhăţeanu G. V. (IV: 487, T. c.: 216), Şerban C. C. (VI: 474*, 8, 80, 6, 8*, 90*, 2, 501, 2, VIII: 306, T. c.: 224, 5 .

Liceul „I. C. Brătianu" Piteşti.

Clasa IV-a: Popescu G. M. (IV: 415, 9, 35, 42, 4, 8, 9, V: 490). *Clasa VII-a:* Cameniţă P. A. (VII: 412, 26).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel" Ploeşti.

Clasa VII-a: Rădulescu R. A. (VII: 427, VIII: 315).

Liceul „Al. Lahovary" Râmnicu-Vâlcea.

Clasa V-a: Andreescu G. I. (V: 499, 503).

Liceul „Pr. Nicolae“ Sighişoara.

Clasa VI-a: Tănăsescu I. N. (VI: 501, 18).

Liceul „Tudor Vladimirescu“ Târgu-Jiu.

Clasa VII-a: Bărbulescu G. (VII: 408*, 10*, T. c.: 215, 6).

Liceul militar „Mihai Viteazul“ Târgu-Mureş.

Clasa III-a: Blăjan C. C. (III: 72, 4, 5, 9, 81), Juncan P. M. (III: 72, 9, 81), Mihalcu I. I. (III: 74, 84, 5), Tepşanu V. (III: 79). — *Clasa VII-a:* Eliade M, (VII: 421, 36), Mironescu I. D. (VII: 421, 36), Paraipan N. C. (T. c.: 224, 5), Pop G. I. (VII: 427, 8), Topalescu G. (T. c.: 217, 24, 5).

Liceul „C. Diaconovici Loga“ Timişoara.

Clasa VI-a: Bakonyi C. (VI: 500, 1, 2, 8, 9, 11, 2, 3, VIII: 325, T. c.: 226).

Liceul „Principele Carol“ Tulcea.

Clasa VII-a: Gheorghiu O. (VII: 410).

Liceul „Sf. Haralambie“ Turnu-Măgurele.

Clasa V-a: Bărbulescu M. L. (V: 509). — *Clasa VI:* Necşescu I. A. (VI: 485, 6), Văituş O. T. (VI: 472, 3). — *Clasa VII-a:* Stoga D. M. (VII: 433).

Liceul „Traian“ Turnu-Severin.

Clasa III-a: Papuc G. G. (III: 86, 9) — *Clasa IV-a:* Dumitrescu G. T. (IV: 425, 34, 6, 44). — *Clasa VI-a:* Glogojeanu M. (VI: 450, 1*, 86, 9*, 93, T. c.: 215, 6, 7).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Ianuarie 1940

Clasa III-a. *Exerc. 93.* Să se construiască trapezul isoscel ABCD când i se dă înălţimea, diagonala $\overline{AC}$ şi segmentul care uneşte vârful C cu mijloacele bazei mici $\overline{AD}$.

C. I. Bujor.

III. 94. Fiind dat un patrulater oarecare ABCD, să se arate că se poate construi un triunghiu cu una din laturile sale şi diagonalele.

V. GH.

III. 95. In triunghiul ABC se duce două drepte paralele BB' şi CC', prin vârfurile B şi C. Să se arate că:

$$\sphericalangle ACC' - \sphericalangle ABB' = \sphericalangle BAC.$$

N. M.

Clasa IV-a. *Exerc. 452.* Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+7}+\sqrt{b^2-11}+\sqrt{c^2+33}}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-\frac{239}{3}(ab+bc+ca)}}$$

pentru $a=3$; $b=-6$, $c=-4$.

G. D. S.

IV. 453. Să se găsească valoarea expresiunii:

$$E=\frac{a+\dfrac{b^2}{a+2b}}{b+\dfrac{a^2}{2a+b}}+\frac{a+\dfrac{b^2}{a-2b}}{b+\dfrac{a^2}{b-2a}}$$

pentru $a=3$, $b=-1$.

E. M.

VI. 454. Se dă un triunghiu dreptunghiu ABC. Pe BC ipotenuza lui se ia un punct oarecare M. Bisectoarele unghiurilor AMB şi AMC taie catetele în P şi Q. Fie R şi S proiecţiile punctelor A şi M pe dreapta PQ, iar T intersecţia lui PQ cu AM.

Să se demonstreze relaţiile:

1°. $\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2=\overline{MP}^2+\overline{MQ}^2$

2°. $\overline{PS}.\overline{SQ}.\overline{AT}^2=\overline{PR}.\overline{RQ}.\overline{MT}^2$.

V. GH.

IV. 455. Intr'un triunghiu ABC dreptunghic în A şi în care bisectoarea interioară BB' este astfel încât triunghiul BB'C este isoscel, avem relaţiile:

$$2\,\overline{AB} = \overline{BC} \quad ; \quad 3\,\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \quad ; \quad 3\,\overline{BB'}^2 = \overline{BC}^2.$$

G. G. C.

IV. 456. Se dă triunghiul dreptunghiu ABC având cateta $\overline{AB} = \sqrt{5}-1$ şi ipotenuza $\overline{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}$. Se prelungeşte segmentul AC cu $\overline{CD} = \overline{CB}$. Perpendiculara ridicată din C pe BD întâlneşte bisectoarea unghiului ABD în E. Să se calculeze:

1) $\overline{AD}$; 2) $\overline{BE}$.

C. I. B.

Clasa V-a. *Exerc. 531.* Să se arate că dacă: $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$, atunci expresiunea:

$$a\,(b-c)\,x^2 + b\,(c-a)\,xy + c\,(a-b)\,y^2$$

se poate scrie:

$$ac \cdot \frac{a-c}{a+c} \cdot (x-y)^2.$$

G. G. C.

V. 532. Să se determine polinomul de gradul al V-lea, care împărţit cu x^2+x+5 să dea restul $3x+2$, împărţit cu $x-1$ să dea restul 5, împărţit cu $x+2$ să dea restul -4 şi împărţit cu $x+3$ să dea restul $+4$, ştiind că x^5 are drept coeficient unitatea.

G. D. S.

V. 533. Se consideră polinomul:

$$P(x) \equiv x^8 + 7x^7 + mx^6 + nx^5 + 4x^4 + 5x^3 + px^2 + qx - 12.$$

Să se determine m, n, p, q astfel ca polinomul să fie divizibil cu x^2-3 şi x^2-2.

C. I. B.

V. 534. Să se scrie un polinom omogen şi de gradul al VIII-lea de forma cea mai generală, ştiind că el este divizibil cu polinoamele :

$$x+2y \quad ; \quad x^2+4y^2 \quad ; \quad x^3-8y^3+2xy(y-x).$$

Să se determine apoi polinomul omogen şi de gradul al VIII-lea cu cel mai mic număr de termeni.

O. N. Ţ.

V. 535. Să se determine m, n şi p astfel ca polinomul $x^4-mx^3+nx^2-px$ să dea acelaşi rest dacă se împarte prin

$$(x-1) \quad ; \quad (x-2) \quad \text{şi} \quad (x-3)^2.$$

C. I. Ţ.

V. 536. Fie AB un diametru al cercului O; DD' tangenta paralelă cu AB. Tangenta dusă la O din un punct C depe AB taie pe DD' în E. Să se demonstreze că triunghiul OCE este isoscel.

GH. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 520.* Să se rezolve sistemul :

$$\sqrt{2c^7-x}+\sqrt[3]{4c^8-y}=c$$

$$\frac{1}{y}+\frac{2c}{x}=\frac{1}{4c^8}.$$

C. I. B.

VI. 521. Să se găsească valorile reale ale lui x, care satisfac ecuaţia :

$$\sqrt[3]{4(x+1)\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{(x-1)\sqrt[3]{6(x-1}}=0.$$

G. D. S.

VI. 522. Să se arate că :

$$[\sqrt{a}+\sqrt{1+a}+(\sqrt{a}+\sqrt{1+a})^{-1}]^2=$$

$$=\frac{1}{a}[1+\sqrt{1+a}-(1+\sqrt{1+a})^{-1}]^2+4.$$

C. I. Ţ.

VI. 523. Să se studieze natura rădăcinilor ecuației

$$(m+1)\,x^2 - 2(2m-1)\,x + 3m - 1 = 0$$

m fiind un număr arbitrar.

E. M.

V. 524. Fie A, B și C trei puncte pe cercul de centru O. Pe razele OA și OB se ia punctele M și N astfel ca:

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle MCN = 180^0.$$

Să se arate că, dacă punctul C variază pe cercul O, iar CM și CN au direcții fixe, atunci segmentul $\overline{MN}$ păstrează o lungime constantă.

G. G. C.

VI. 525. Fie

$$\cos\varphi = \frac{2x\sqrt{x^4-1}}{1+x+2x^3};$$

să se calculeze $\sin\varphi$.

N. M.

VI. 526. Să se arate *direct* că

$$\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5};\quad \sin\frac{4\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5};\quad \operatorname{tg}\frac{9\pi}{7} = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{7};\quad \cos\frac{8\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}.$$

E. M.

Clasa VII-a. *Exerc. 446.* Să se arate, că:

$$C_{2m}^{m} \cdot C_{4m}^{2m} \cdot C_{8m}^{4m} \ldots C_{2^{k+1}\,.\,m}^{2^k\,.\,m} \cdot (P_m)^2 \cdot P_{2m} \cdot P_{4m} \ldots P_{2^k\,.\,m} = P_{2^{k+1}\,.\,m}.$$

N. N.

VII. 447. Să se demonstreze că avem relația:

$$(C_{m-1}^{n})^3 + (C_{m-1}^{n-1})^3 = \frac{m^2 - 3mn + 3n^2}{m^2}(C_m^n)^3.$$

(Simpla verificare a relației nu e suficientă).

G. D. S.

VII. 448. Să se stabilească egalitatea:

$$\frac{C_n^p}{C_{n+1}^p} - \frac{C_{n+1}^p}{C_{n+2}^p} = -\frac{p}{(n+1)(n+2)}.$$

C. I. B.

VII. 449. Să se calculeze suma:

$$T_1 \cdot T_2 + T_2 \cdot T_3 + \ldots + T_{n-1} T_n$$

unde T_n este numărul triunghiular $\frac{n(n+1)}{2}$.

G. G. C.

VII. 450. Se dau opt cartoane dreptunghiulare egale având imprimate pe față patru din ele litera *a*, iar celelalte litera *b*. Să se găsească ordinea în care trebue să le aşezăm pachet, cu faţa în jos, pentru ca dând pe faţă primul carton, punând apoi următorul la fundul pachetului, scoţând pe al treilea şi aşezându-l pe faţă lângă primul, etc. până isprăvim toate cartoanele, să răuşim a le obţine aranjate în felul *abababab*.

Aceeaşi chestiune pentru *12* cartoane, patru câte patru identice.

V. GH.

VII. 451. Să se arate că:

$$\sum_{n=1}^{n} \sum_{n=1}^{n} \sum_{n=1}^{n} n = \frac{n^2}{24}(n^2+11) + \frac{n}{4}(n+1).$$

C. I. Ţ.

VII. 452. Să se verifice identitatea:

$$(a+1)^8 - 8a(a+1)^6 + 32a^2(a+1)^4 - 64a^3(a+1)^2 \equiv$$

$$(a-1)^8 + 8a(a-1)^6 + 32a^2(a-1)^4 + 64a^3(a-1)^2.$$

† N. BOTEA.

Clasa VIII-a. *Exerc. 333.* Să se reprezinte grafic funcţia:

$$y = \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}{x}.$$

E. M.

VIII. 334. Se conideră dreptele

$$D_1 = A_1x + B_1y + C_1 \quad , \quad D_2 = A_2x + B_2y + C_2$$

şi

$$D_1+\lambda D_2=0,\ D_1+(\lambda+1)D_2=0,\ D_1+(\lambda+2)D_2=0,\ D_1+(\lambda+3)D_2=0$$

care determină pe Ox punctele M_1, M_2, M_3, M_4.

Să se arate că avem:

$$\frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_3M_2}} : \frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_2}} = \frac{4}{3}.$$

C. I. B.

VIII. 335. Se dau punctele A(3, 0) şi B(0, 5). Pe paralela dusă prin A la OY să se determine un punct C astfel încât bisectoarea unghiului ACB să treacă prin origină.

G. D. S.

VIII. 336. Să se afle locul geometric al vârfului A al unui triunghiu oarecare ABC, la care B şi C sunt fixe, iar medianele din aceste vârfuri sunt perpendiculare.

V. Gh.

337. Fie

$$f(x) = \int \frac{x+3}{(x-1)^3}dx \quad \text{şi} \quad g(x) = \int \frac{x-3}{(x+1)^3}dx.$$

Să se verifice relaţia

$$\frac{f(x)-f(o)}{g(x)-g(o)} \cdot \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\left(\frac{x+1}{x+1}\right)^5.$$

N. M.

VIII. 338. Să se arate că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2^n x)\,dx = \frac{\pi}{4},$$

apoi să se calculeze integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2^n x)\,dx.$$

C. I. Ţ.

VIII. 339. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\sin x}}$$

şi să se reprezinte această variaţie.

O. N. Ţ.

Toate clasele. *Exerc. 234.* Se cere numărul N format din divizorii 3 şi 5 ştiind că:

a) $\frac{2N}{5}$ are acelaşi număr de divizori ca şi N

b) Cel mai mare divizor comun al numerelor N şi $\frac{2N}{5}$ este 9.

E. M.

T. C. 235. Pot exista cinci numere de câte două cifre în progresie aritmetică, scrise utilizând toate cifrele specifice?

I. L.

T. C. 236. Produsul cifrelor anului de naştere a unei persoane, care trăeşte azi, este 567. Ce vârstă are persoana?

I. L.

T. C. 237. Câte numere prime de două cifre, de forma (x^2+1), sunt?

I. L.

T. C. 238. Câte cuburi perfecte de patru cifre, de forma (x^2+1), sunt?

I. L.

T. C. 239. Câte patrate perfecte în progresie aritmetică, având câte trei cifre, pot exista?

I. L.

Numărul 2, Vol. VI, al „Gazetei Matematice" Supliment cu exerciţii apare la 1 Noemvrie a. c.

Tipărindu-se un număr limitat de exemplare, vechii abonaţi cât şi colegii lor care doresc să se aboneze sunt rugaţi a se abona în primele luni ale anului şcolar.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuş, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se vor scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Nume de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, însoţit de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluţiilor se pot vedea indicaţiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Ţiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

MONITORUL OFICIAL ȘI
IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
BUCUREȘTI — 1939

C.58.571

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 2 1 NOEMVRIE 1939

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNEA"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 2 — 1 NOEMVRIE 1939

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

PROGRAMA ANALITICĂ

HOTĂRÎTĂ PENTRU CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN ANUL 1940

Clasa IV-a. Toată materia prevăzută de programa analitică.

Clasa V-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. La împărţirea cu $(x+a)$ se va face rezolvarea ecuaţiilor cu rădăcini întregi şi fracţionare.

2. La radicale se va face raţionalizarea numitorilor cari conţin radicale patrate şi de indici superiori.

3. La sistemele de ecuaţii de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare şi sisteme reductibile la gradul I.

4. La discuţia semnului trinomului se va face generalizare în legătură cu punctul 1.

5. Transformarea expresiunilor de forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

6. Progresiuni aritmetice şi geometrice.

Grupa II-a. **Geometria plană.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Fascicole de drepte paralele şi de drepte concurente (teoreme directe şi reciproce).

2. Omotetia (La cercuri: centre de asemănare directe şi inverse).

3. Teorema lui MENELAUS şi CEVA şi reciprocele lor.

4. Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulaterele inscriptibile. Teorema lui MIQUEL. Patrulater circumscris unui cerc. Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte.

5. Puterea unui punct față de un cerc. Ax și centru radical.

6. Raportul ariilor a două polinoame asemenea.

7. Reciproca teoremei lui PITAGORA. Relația metrică a lui STEWART. Aplicație la mediane, etc.

8. Poligoane regulate circumscrise.

Clasa VI-a. Grupa I. **Geometria în spațiu.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Unghiuri diedre. Măsura lor. Unghiuri triedre și poliedre, proprietățile lor.

2. Aria și volumul trunchiului de piramidă. Extindere la con.

3. Volumul produs de un sector poligonal plan care se rotește în jurul unei axe. Volumul zonei, calotei, sferei.

Grupa II-a. **Trigonometria.** Toată materia prevăzută în progresie analitică până la „Aplicațiile trigonometriei la agrimensură și statică". In plus:

1. Aria unui triunghiu în raport cu elementele date.

2. Raza cercului circumscris în funcțiune de laturile triunghiului. Razele cercurilor înscrise și exînscrise triunghiului. Relațiuni.

3. Identități trigonometrice.

4. Cazuri particulare de rezolvare la triunghiuri dreptunghice și oarecare.

5. Determinarea distanțelor între puncte inaccesibile.

6. Problema hărții.

Clasa VII-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică, fără „Aplicații la cinematică", la care se adaogă: Serii, criterii de convergență, seria lui *e*, definiția logaritmilor neperieni.

Grupa II-a. **Geometria descriptivă.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Diviziuni armonice, fascicole armonice. Pol și polară în raport cu un unghiu și în raport cu un cerc.

Teoremele lui PASCAL și BRIANCHON. Patrulatere complete.

2. Transformări: inversiune, polare reciproce.

Clasa VIII-a. Grupa I. **Algebra.** Materia prevăzută de programa analitică.

Grupa II-a. **Geometria analitică.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus :

1. Schimbarea de axe.
2. Pol şi polară.
3. Clasificarea conicelor.

Grupa III-a. **Mecanica.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus Cinematica.

* * *

Orice candidat trebue să cunoască materia respectivă a clasei precedente cu adăugirile prevăzute în prezenta programă.

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa V-a. *Exerc. 498. Să se rezolve ecuaţia :*

$$40x^4 + 120x^3 - 32x^2 - 183x + 90 = 0$$

ştiind că prin substituţia :

$$y = 2x^2 + mx + n$$

se reduce la o ecuaţie de gradul II având termen liber (— 3).

G. D. S.

Din enunţ rezultă :

$$40x^4 + 120x^3 - 32x^2 - 183x + 90 \equiv ay^2 + by - 3$$

$$\equiv a(2x^2 + mx + n)^2 + b(2x^2 + mx + n) - 3.$$

Desvoltând şi egalând coeficienţii găsim :

$$4a = 40 \; ; \; 4am = 120 \; ; \; a(m^2 + 4n) + 2b = -32$$

$$2amn + bm = -183 \; ; \; an^2 + bn - 3 = 90.$$

Deducem :

$$a = 10 \; ; \; m = 3 \; ; \; n = \begin{cases} -\frac{31}{10} \\ -3 \end{cases} \; ; \; b = \begin{cases} +1 \\ -1. \end{cases}$$

Deci vom avea :

(1) $10y^2 + y - 3 = 0$ cu $y = 2x^2 + 3x - \frac{31}{10}$

(2) $10y^2 - y - 3 = 0$ cu $y = 2x^2 + 3x - 3$

care trebue să ducă însă la aceleaşi rădăcini în x, deci alegem ecuaţia mai simplă (2).

Găsim :

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{20} \; ; \; x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{4} .$$

V. 504. Să se rezolve sistemul :

$$3x^3 + 3y^3 - 7(x^2 + y^2) - 169(x + y) + 255 = 0$$

$$xy = -18.$$

(Enunţ rectificat). G. D. S.

Prima ecuaţie se poate pune sub forma :

$$3[(x+y)^3 - 3xy(x+y)] - 7[(x+y)^2 - 2xy] - 169(x+y) + 255 = 0$$

sau ţinând seamă de a doua ecuaţie

$$3(x+y)^3 + 162(x+y) - 7(x+y)^2 - 252 - 169(x+y) + 255 = 0.$$

Notând $x + y = u$ găsim ecuaţia reciprocă :

$$3u^3 - 7u^2 - 7u + 3 = 0 \quad \therefore \quad u_1 = -1 \; ; \; u_2 = \frac{1}{3} \; ; \; u_3 = 3.$$

Se formează atunci sistemele :

$$\text{I} \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -18 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} x + y = \frac{1}{3} \\ xy = -18 \end{cases} \quad \text{III} \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -18 \end{cases}$$

care ne dau :

$$\text{I} \begin{cases} x, y = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{2} \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} x, y = \frac{1 \pm \sqrt{649}}{6} \end{cases} ; \quad \text{III} \begin{cases} x = 6 \\ y = -3. \end{cases}$$

Toate clasele. *Exerc. 56. Doi copii mergând „cu Moş-Ajunul", au strâns câte 200 de nuci. Ştiind că dela casele cu număr par au primit 1 nucă, dela casele cu număr patrat perfect câte 2 nuci, dela cele cu număr cub perfect câte 3 nuci, iar dela celelalte nici una, se întreabă, câte case are satul ?*

I. L.

Numărul caselor este mai mic decât *400,* căci eliminând numerele impare, ne rămâne *200.* Să presupunem că ar fi *300* de case, atunci eliminând numerele impare, ne rămâne *150.* Din acestea scoatem patratele şi cuburile pare, adică :

4, 8, 16, 36, 64, 100, 144, 196, 256,

adică în total nouă, ne rămân :

$$150 - 9 = 141 \text{ nuci.}$$

Deasemenea socotind patratele perfecte şi pare şi impare, avem :

4, 9, 16, 25, 36, 49, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289,

adică :

$$2 \times 15 = 30 \text{ nuci.}$$

Socotind apoi cuburile perfecte şi pare şi impare, avem :

1, 8, 27, 64, 125, 216,

adică :

$$3 \times 6 = 18 \text{ nuci.}$$

In total fac $141 + 30 + 18 = 189.$

Până la *200* mai trebuesc deci *11,* şi în acest caz mai putem socoti încă 11 case cu număr par, adică satul va avea *322 case.*

T. C. 196. Dacă $\varphi(l)$ *reprezintă indicatorul lui* l, *atunci avem:*

$$\varphi(100!) = M2^{100}.$$

I. L.

In G. M., XL, pag. 178, se dă soluția problemei 3354 prin care se demonstrează că pentru $n \geqslant 5$ avem:

$$\varphi(n!) = M2^n .$$

Urmărind deci soluțiunea de acolo, se observă ușor că pentru $n = 100$ avem tocmai cazul exercițiului 196.

C. c. e. d. d.

T. C. 197. Dacă a *este un număr prim și* $\varphi_i(n)$ *este indicatorul de ordinul* i *a lui* n, *avem:*

$$[\varphi_\alpha(a^\alpha)]^2 \geqslant \varphi_{2\alpha}(a^{2\alpha}).$$

I. L.

Dacă a este prim, avem:

$$\varphi_1(a^\alpha) = a^{\alpha-1}.(a-1)$$

$$\varphi_2(a^\alpha) = a^{\alpha-2}.(a-1)\,\varphi(a-1)$$

$$\varphi_3(a^\alpha) = a^{\alpha-3}.(a-1)\,\varphi[(a-1)\,\varphi(a-1)]$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi_\alpha(a^\alpha) = (a-1)\,\varphi[(a-1)\,\varphi(a-1)\ldots\underbrace{]]\ldots]}_{\alpha-1}.$$

In mod analog, avem:

$$\varphi_{2\alpha}(a^\alpha) = (a-1)\,\varphi[(a-1)\,\varphi(a-1)\ldots\underbrace{]]\ldots]}_{2\alpha-1}.$$

In mod simbolic putem admite că:

$$\varphi_\alpha(a^\alpha) = (a-1)_0\,(a-1)_1\ldots(a-1)_{\alpha-1}$$

$$\varphi_{2\alpha}(a^{2\alpha}) = (a-1)_0\,(a-1)_1\ldots(a-1)_{\alpha-1}\ldots(a-1)_{2\alpha-1}$$

unde avem:

$$(a-1)_0 > (a-1)_1 > (a-1)_2 \ldots > (a-1)_{\alpha-1} > \ldots (a-1)_{2\alpha-1}.$$

Prin urmare:

$$[\varphi_\alpha(a^\alpha)]^2 \geqslant \varphi_{2\alpha}(a^{2\alpha}).$$

Egalitatea nu există decât dacă $a = 2$.

C. c. e. d. d.

T. C. 199. Dacă $I_a(b)$ *reprezintă numărul numerelor prime cu* b *din şirul natural al primelor* a *numere şi* $\varphi(c)$ *indicatorul lui* c, *atunci avem:*

$$I_{2\times 1939}(1939) = 2 \cdot \varphi(1939).$$

I. L.

Ştim din G. M., XLI — 278, formula 1), că:

$$I_a(b) = a - \Sigma E\left(\frac{a}{\alpha}\right) + \Sigma E\left(\frac{a}{\alpha\beta}\right) - \ldots$$

unde α, β... sunt factorii lui b.

Atunci:

$$I_{2\times 1939} = 2 \cdot 7 \cdot 277 - 2 \cdot 277 - 2 \cdot 7 + 2 = 3312.$$

Apoi:

$$\varphi(1939) = 1656.$$

C. c. e. d. d.

T. C. 200. Dacă $S_a(b)$ *reprezintă suma numerelor prime cu* b *din şirul natural al primelor* a *numere,* $\varphi(c)$ *indicatorul şi* $\sigma(c)$ *suma numerelor prime cu* c *şi mai mici ca el, atunci avem:*

$$S_{2\times 1939}(1939) = 2 \cdot \sigma(1939) = 1939 \cdot \varphi(1939).$$

I. L.

Utilizând formula 2) din G. M., XLI — 278, unde:

$$p = a \quad \text{şi} \quad N = b$$

obţinem demonstraţia cerută.

C. c. e. d. d.

T. C. 201. Dacă $P_a(b)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* b *din şirul natural al primelor* a *numere şi* $\pi(c)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* c *şi mai mici decât el, atunci avem:*

$$P_{2\times 1939}(1939) = [\pi(1939)]^2.$$

I. L.

Utilizând formula 3) din G. M., XLI — 279, unde:

$$p = a \quad \text{şi} \quad N = b$$

obţinem rezultatul problemei.

C. c. e. d. d.

T. C. 206. Dacă N *este prim cu 1939, atunci avem:*

$$(N^{823} + 1)(N^{414} + 1)(N^{207} + 1)(N^{138} + N^{69} + 1)$$

$$(N^{46} + N^{23} + 1)(N^{23} - 1) = M1939.$$

I. L.

Observăm că produsul parantezelor are valoarea:

$$N^{1636} - 1 = N^{\varphi(1939)} - 1 = M1939$$

căci $\varphi(1939) = 1636$, iar N este prim cu 1939, conform teoremei lui FERMAT generalizată.

C. c. e. d. d.

T. C. 207. Să se arate că produsul:

$$(1939^{60} + 1)(1939^{30} + 1)(1939^{15} + 1)(1939^{10} + 1939^{5} + 1)$$

se împarte exact cu 11×13.

I. L.

Ştim bine că expresiunea $(1939^5 - 1)$ nu se împarte exact cu 11×13.

Dacă produsul de mai sus îl înmulţim şi cu acest factor, atunci el capătă valoarea:

$$E \equiv 1939^{120} - 1.$$

Dar după teorema lui FERMAT, avem:

$$E \equiv (1939^{12})^{10} - = M11$$

$$E \equiv (1939^{10})^{12} - 1 = M13.$$

C. c. e. d. d.

T. C. 212. Dacă $\sigma(l)$ *reprezintă suma numerelor prime cu* l *şi mai mici decât el, iar* $\varphi_i(l)$ *indicatorul de ordinul* i *a lui* l, *atunci avem*:

$$\sigma[\varphi_{4+n}(1939)] = 2^{10-2n}.$$

I. L.

Avem:

$$\varphi_1(1939) = 2^3 . 3^2 . 23$$

$$\varphi_2(1939) = 2^4 . 3 . 11$$

$$\varphi_3(1939) = 2^5 . 5$$

$$\varphi_n(1939) = 2^6$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi_{4+n}(1939) = 2^{6-n}.$$

Apoi:

$$\sigma[\varphi_{4+n}(1939)] = \frac{1}{2} . 2^{6-n} . \varphi(2^{6-n}) = 2^{10-2n}.$$

C. c. e. d. d.

T. C. 213. Dacă $\pi(l)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* l *şi mai mici decât el, iar* $\varphi_i(l)$ *indicatorul de ordine* i *a lui* l, *atunci avem:*

$$\pi[\varphi_7(1939)] = 105.$$

I. L.

Avem:

$$\varphi_1(1939) = 2^3 . 3^2 . 23$$

$$\varphi_2(1939) = 2^4 . 3 . 11$$

$$\varphi_3(1939) = 2^5 . 5$$

$$\varphi_4(1939) = 2^6$$

$$\varphi_5(1939) = 2^5$$

$$\varphi_6(1939) = 2^4$$

$$\varphi_7(1939) = 2^3.$$

Apoi ştim că:

$$P(a^a) = \frac{a^a!}{a^{a-1}!\ a^{a^{a-1}}}.$$

Deci:

$$P(2^3) = \frac{8!}{4!\ 2^4} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105.$$

C. c. e. d. d.

Până la 5 Octomvrie s'au primit soluţiuni bune pentru exerciţiile publicate în numărul 1 anul VI, dela[1]):

Şcoala Centrală de fete Bucureşti.

Clasa IV-a: Niculescu Sanda (IV: 452*, 3).
Clasa VI-a; Agapie Gh. Elena (T. c.: 236).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa III-a: Agapie Gh. Paula (III: 93).
Clasa IV-a: Iliescu Gh. Viorica (IV: 451*).

Liceul de fete „Carmen-Sylva" Bucureşti.

Clasa III-a: Ispas Eleonora (III: 95).
Clasa VII-a: Crasoveanu Lucia (VII: 448, 52), Vasiliu C. Margareta (VII: 448, 52).
Clasa VIII-a: Constantinescu D. Paula (VIII: 337, 8*).

Liceul „Notre Dame de Sion" Iaşi.

Clasa VII-a: Groholschi G. Consuela (VII: 447, 8, 52).

Liceul de fete „Carmen-Sylva" Timişoara.

Clasa VII-a: Checian N. Ana (VII: 426, 7, 34, VIII: 333, 4, 5, T. c.: 236, 7), Gal E. Lili (VII: 448, 52), Ionescu I. Lucia (VII: 447, 8, 52), Mang Ileana (VII: 451*, 2, VIII: 336).
Clasa VIII-a; Adler L. Editii (VIII: 334), Ungar A. Veronica (VIII: 334).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Liceul de fete Râmnicu-Vâlcea.

Clasa VII-a: Jurcan Gh. Sofia (VII: 446*).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa VII-a: Fundăţeanu M. (VII: 447, 8), Kraus R. (VII: 448), Theodoroff A. I. (VII: 448, VIII: 338*).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a: Dimos H. Florin (IV: 453*).
Clasa VI-a: Pastia C. C. (VI: 525*).
Clasa VII-a: Ciurescu I. Florin (VII: 452).
Clasa VIII-a: Ghiţescu M. (VIII: 335).

Liceul „Mihaiu Viteazu" Bucureşti.

Clasa VIII-a: Brezeanu Cornel (VIII: 338*).

Liceul „Titu Maiorescu" Bucureşti.

Clasa VII-a: Niculescu C. M. (VII: 446*, 7*, 8, 9, 50, 1*, 2*), Partheniu C. M. (VII: 448, 52).

Liceul „Mihail Eminescu" Bucureşti.

Clasa VIII-a: Leibovici S. (VIII: 334, 6, 8).

Liceul „Sf. Andrei" Bucureşti.

Clasa VII-a: Senchi E. (VII: 448, 9, 50, 1*, 2), Ştefanovici I. M. (VII: 446*, 7*, 8, 9, 50, 1*, 2).

Liceul „Profesorilor Asociaţi" Bucureşti.

Clasa VII-a: Marcusohn Oct. (VII: 448, 51, 2, T. c.: 235, 7).

Liceul „Samuil Vulcan" Beiuş.

Clasa VII-a: Deheleanu I. Gh. (VII: 448, 52, T. c.: 235, 7).

Liceul „Sf. Vasile" Blaj.

Clasa IV-a: Balea I. Ion (IV: 452, 4).

Liceul „Andrei Şaguna" Braşov.

Clasa VII-a: Badea A. (VII: 446, 8, 52, T. c.: 235, 7).

Liceul „Dr. I. Meşotă" Braşov.

Clasa VII-a : Stere C. D. (VII : 446, 7, 8).
Clasa VIII-a : Rosenzweig S. Mircea (VIII : 338*, 9).

Liceul Internat „Buftea".

Clasa IV-a : Burghele N. (IV : 452, 3), Tănăsescu M. (IV : 452, 3).
Clasa VIII-a : Cernescu P. Gabriel (VIII : 333*).

Liceul militar Cernăuţi.

Clasa III-a : Dumitrescu I. (III : 85, 6, 90).

Liceul „Mitropolitul Silvestru" Cernăuţi.

Clasa IV-a : Chifu N. Emil (IV : 453), Cimbru V. M. (IV : 453), Huţul C. (IV : 453), Niculaescu Ion (IV : 454), Ranga A. C. (IV : 453, 4), Rizescu Ovidiu (IV : 453), Stoica I. C. (IV : 453, 4), Vasiliu Gh. Dumitru (IV : 453, 4).
Clasa V-a : Volschi Al. (V : 535, 6).

Liceul „Ştirbey Vodă" Călăraşi.

Clasa VII-a : Mihalcu M. (VII : 448, 52).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VII-a : Călugăreanu R. A. (VII : 446*, 8, 52, T. c : 237), Petrescu R. G. (VII : 446*, 8, T. c. : 237).
Clasa VIII-a : Văduva F. M. (VIII : 339, T. c. 234, 5, 6, 7, 8).

Liceul militar Iaşi.

Clasa VIII-a : Gheorghiu P. (VIII : 334), Jiletcovici G. Alex. (VIII : 334, 5, 6, 8*, 9, T. c. : Petrescu V. Achile (VIII : 330), Turcu R. Sandu (VIII : 337*, 8*).

Liceul „D. A. Sturdza" Tecuci.

Clasa VII-a : Sbârnea D. G. (VII : 446, 7, 8, 9, 51*, T. c. : 236*).

Liceul militar „Mihai Viteazul" Târgu-Mureş.

Clasa V-a : Vonia I. I. (V : 536).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa VI-a : Corâciu I. C. (VI : 521, T. c. : 235, 6, 7, 8).
Clasa VII-a : Mihail I. Gh. (VII : 446*, 7, 8, 51*, 2, T. c. : 236, 7).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Februarie 1940

Clasa III-a. *Exerc. 96.* Să se construiască un trapez ABCD cunoscând cercul ABD, lungimea diagonalei mici $\overline{BD}$, înălțimea vârfului A a triunghiului ABD și mărimea unghiului C.

C. I. B.

III. 97. Fie A, B, C, D patru puncte pe un cerc și o dreaptă care trecând prin vârful B, interioară patrulaterului, face cu AB unghiul ascuțit 1 și cu BC, unghiul obtus 2, să se arate că

$$\sphericalangle 2 - \sphericalangle 1 = \sphericalangle ADC.$$

N. M.

III. 98. Se dă un patrat cu suprafața de 48 cm² și se cere să se înscrie, prin construcție grafică, în acest patrat un alt patrat a cărui suprafață să fie de 36 cm².

C. I. Ț.

III. 99. Se dau două segmente egale și paralele $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. Prin A și prin C se duc două drepte ce se întâlnesc în E. Paralelele duse prin D și B respectiv la AE și CE se taie în F. Să se demonstreze 1) că triunghiurile ACF și BDE sunt egale; 2) că dreptele AD, BC, EF trec prin același punct.

G. D. S.

III. 100. Să se facă operațiunile:

$$\frac{2+\dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{2+\frac{2}{3}+\dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}}}{3} + \frac{5}{6}.$$

G. D. S.

III. 101. Un funcționar cheltuește din salariul său $\frac{4}{9}$ pentru masă, $\frac{5}{21}$ pentru chirie, $\frac{11}{120}$ pentru casa de economie, iar $\frac{41}{180}$ sunt cheltueli neprevăzute. Ce leafă are acest funcționar, dacă îi mai rămâne 324 lei la sfârșitul lunei.

A. V. N.

Clasa IV-a. *Exerc. 457.* Să se verifice egalitățile numerice:

$$5^6 - 3^6 + 2^{11} = 24 \times (3^4 + 5^4)$$

$$5^8 - (2^5 \times 5^6) + (2^9 \times 5^4) - (2^{12} \times 5^2) = 3^8 + (2^5 \times 3^6) + (2^9 \times 3^4) + (2^{12} \times 3^2).$$

† N. BOTEA.

IV. 458. Să se arate că

$$7^6 - (4 \times 7^5) - (26 \times 7^4) + (37 \times 7^3) - (22 \times 7^2) + (53 \times 7) + 36 = (-5)^6 + 8 \cdot (-5)^5 + 10 \cdot (-5)^4 - 23 \cdot (-5)^3 - 43 \cdot (-5).$$

C. I. Ț.

IV. 459. Să se calculeze:

$$E = \left[\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\right]^2 + \left[\left[\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2\right]^2 + 2\right]^2$$

apoi să se calculeze valoarea lui E pentru $a = \sqrt{2} - 1$.

C. I. B.

VI. 460. Să se calculeze expresiile:

$$E \equiv (x + 2y)^2 - (3x + y)(3x - y) + (2x - y)^2 - 2(y\sqrt{3} - x\sqrt{2})(y\sqrt{3} + x\sqrt{2})$$

$$F \equiv \frac{1}{5}(2x - 3y)^2 - \frac{1}{5}(3x - 2y)^2 + (x + y)(x - y)$$

$$G \equiv \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{3b}\right)^2 + \left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{2b}\right)^2 - \frac{13}{36}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{25}{18ab}.$$

N. M.

IV. 461. Un trapez ABCD, dreptunghic în A şi B, are latura $\overline{AB} = a$, baza mică $\overline{AD} = b$ şi $\sphericalangle BDC = 90^0$. Să i se calculeze celelalte laturi, diagonala şi suprafaţa.

Aplicaţie:

$$a = 4 \quad ; \quad b = 3.$$

G. D. S.

IV. 462. Să se descompună în factori expresia:

$$E \equiv [(x^2+y^2)^3 (u^2-v^2)^3 + (x^2-y^2)^3 (u^2+v^2)^3]^2 - [(x^2-y^2)^3 (u^2-v^2)^3 + (x^2+y^2)^3 (u^2+v^2)^3]^2$$

şi să se arate că pentru toate valorile (pozitive sau negative) ale numerelor algebrice x, y, u, v expresia E este negativă.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 537.* Să se facă operaţiunile:

$$\left[\frac{a+b-c}{a+b+c} + \frac{a+b+c}{a+b-c} + \frac{4c(a+b)}{a^2+b^2-c^2+2ab}\right] : \left[\frac{a^2+b^2+c^2+2ab}{a+b-c} - a - b + c\right]$$

scriind rezultatul sub forma cea mai simplă.

G. D. S.

V. 538. Să se arate că

$$\Sigma a(b-c)(1+bc) = 0 \quad ; \quad \Sigma \frac{(1+a)(1+bc)}{(a-b)(a-c)} = 3.$$

N. M.

V. 539. Să se arate că

$$E \equiv (x-a)(x-b)(x-c) + (y-a)(y-b)(y-c) + (z-a)(z-b)(z-c) + (a-x)(c-y)(b-z) + (b-x)(a-y)(c-z) + (c-x)(b-y)(a-z)$$

este divizibilă cu $(x+y+z-a-b-c)$.

C. I. B.

V. 540. Să se construiască un cerc egal depărtat de patru puncte oarecare date în plan. Discuţie.

A. A. R.

V. 541. Să se descompună în factori expresia :

$$E \equiv (z-y)(y+z-x)[4(z-y)^2+\lambda(y+z-x)^2]+$$
$$+(x-z)(z+x-y)[4(x-z)^2+\lambda(z+x-y)^2]+$$
$$+(y-x)(x+y-z)[4(y-x)^2+\lambda(x+y-z)^2].$$

O. N. Ţ.

V. 542. Să se descompună în factori expresia :

$$E \equiv \Sigma a(b-c)[(b-c)^2+\lambda a(b-c)+\lambda^2a^2][(b-c)^2-\lambda a(b-c)+\lambda^2a^2]$$

termenii sumei deducându-se din cel scris prin permutări circulare făcute asupra literelor *a, b, c* [adică pentru a avea termenul al doilea se schimbă în primul *a* în *b*; *b* în *c*; iar *c* în *a*; în acelaşi fel deducem al treilea termen din al doilea].

O. N. Ţ.

V. 543. *m, n, p* fiind numere pozitive, să se arate că expresia :

$$E \equiv (m-n)[x^{pn-1}+x+1][x^{pm-1}+x+1]$$
$$-3m[x^{pm-1}+x+1]+3n[x^{pn-1}+x+1],$$

unde $m>n$, este divizibilă cu $(x-1)^2$ şi să se calculeze câtul întreg.

O. N. Ţ.

V. 544. Să se desvolte polinomul :

$$P(x,y,z) = 2(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)-3(xy+yz+zx)^2$$

ţinând seamă că este funcţiune simetrică şi omogenă de *x, y, z.*

V. Gh.

Clasa VI-a. *Exerc. 527.* Să se arate că

$$\left[\frac{1-a^{\frac{7}{4}}}{1-a}-\frac{1+a^{\frac{7}{4}}}{1+a}\right].a=\frac{1-a^{\frac{7}{4}}}{1-a}+\frac{1+a^{\frac{7}{4}}}{1+a}-2.$$

C. I. Ţ.

VI. 528. Să se determine patru numere în progresie aritmetică ştiind că suma tuturor produselor de câte *două* este *86,* iar suma tuturor produselor de câte trei este *176.*

Generalizare când sumele sunt a şi b.

C. I. B.

VI. 529. Intr'un triunghiu ABC, dreptunghiu în A, se notează cu D proiecţia vârfului A pe ipotenuza BC. Fie A_1 proiecţia lui D pe AC, iar D_1 aceea a lui A_1 pe BC; A_2 proiecţia lui D_1 pe AC, iar D_2 aceea a lui A_2 pe BC şi aşa mai departe: A_n proiecţia lui D_{n-1} pe AC, iar D_n aceea a lui A_n pe BC.

Se cere să se arate că segmentele $\overline{A_n D_{n-1}}$ şi $\overline{A_n D_n}$ sunt termenii de rangul $n+1$ al unor progresii geometrice de aceeaşi raţie şi ai căror primi termeni sunt respectiv segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{AD}$.

Să se arate apoi că dacă rangul n tinde către infinit, suma acestor progresii tinde către o *limită finită* şi că raportul acestor limite este egală cu dublul ariei triunghiului de referinţă ABC.

G. G. C.

VI. 530. Să se arate că

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2-\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}}{(\operatorname{tg} x+\sec x)^2-\dfrac{1}{(\operatorname{tg} x+\sec x)^2}}=\cos^3 x.$$

C. I. Ţ.

VI. 531. Să se arate că expresia

$$\frac{1+\sin 6a}{1-\sin 2a}$$

se poate pune subt formă de patrat perfect.

G. D. S.

VI. 532. Să se arate că numărul

$$N = +\sqrt{26 + 6\sqrt{13 - 4\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}}} + \sqrt{26 - 6\sqrt{13 + 4\sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}}}$$

este un număr rațional.

O. N. Ț.

VI. 533. Să se arate în ce caz suma sau diferența expresiunilor E_1 și E_2,

$$E_1 \equiv \sqrt{-[[(n-1)^2 - 2]a^2 + 1] + 2na\sqrt{\ldots + 8a\,A}}, \text{ unde}$$

$$A = \sqrt{-(2a^2+1) + 6a\sqrt{(a^2-1) + 4a\sqrt{(2a^2-1) + 2a\sqrt{a^2-1}}}}$$

$$E_2 \equiv \sqrt{[(3n^2 - 2n + 1)a^2 - 1] - 2na\sqrt{\ldots - 8a\,B}}, \text{ unde}$$

$$B = \sqrt{(22a^2-1) - 6a\sqrt{(9a^2-1) - 4a\sqrt{(2a^2-1) - 2a\sqrt{a^2-1}}}}$$

este un număr rațional; n fiind numărul radicalilor suprapuși.

O. N. Ț.

VI. 534. Se consideră șirul:

$$a\sqrt[m]{a}\ ;\ a\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a}}\ ;\ a\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a}}};\ \ldots$$

1°. Ce devine acest șir când termenul al doilea este $\sqrt[4]{a^3}$.
2°. In ce caz acest șir devine o progresie geometrică.

V. Gh.

Clasa VII-a. *Exerc. 453.* Să se arate că

$$\begin{vmatrix} \frac{b^2}{a-b} & \frac{c^2}{b-c} & \frac{a^2}{c-a} \\ b-c & c-a & a-b \\ b^2-c^2 & c^2-a^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix} \equiv a^2(b-c)(c+a)+b^2(c-a)(a+b)+c^2(a-b)(b+c).$$

G. D. S.

VII. 454. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} a^2-(b-c)^2 & b^2-(c-a)^2 & c^2-(a-b^2) \\ b^2-(c-a)^2 & c^2-(a-b)^2 & a^2-(b-c)^2 \\ c^2-(a-b)^2 & a^2-(b-c)^2 & b^2-(c-a)^2 \end{vmatrix}.$$

G. G. C.

VII. 455. Se notează:

$$S_1^n = 1+2+\ldots+n \quad , \quad S_2^n = 1^2+2^2+\ldots+n^2.$$

Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} \frac{S_2^i}{S_1^i} & \frac{S_2^{i+1}}{S_1^{i+1}} & \frac{S_2^{i+2}}{S_1^{i+2}} \\ \frac{S_2^k}{S_1^k} & \frac{S_2^{k+1}}{S_1^{k+1}} & \frac{S_2^{k+2}}{S_1^{k+2}} \\ \frac{S_2^m}{S_1^m} & \frac{S_2^{m+1}}{S_1^{m+1}} & \frac{S_2^{m+2}}{S_1^{m+2}} \end{vmatrix}.$$

C. I. B.

VII. 456. Să se arate că determinantul

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & \cos x & \frac{\cos y \cos z}{1+\sin y \sin z} \end{vmatrix}$$

în care linia a doua şi a treia se obţin prin permutare, este nul.

N. M.

VII. 457. Fie un patrat ABCD pe care alegem sensul pe contur sensul ABCD. Un segment de dreaptă $\overline{LM}$ de lungime $l > \overline{AC}$ se sprijină respectiv în L şi M pe dreptele BA şi BC în unghiul ABC şi taie laturile DA şi DC în P şi N. Suma proiecţiunilor segmentelor $\overline{LP}$, $\overline{PN}$, $\overline{NM}$ respectiv pe BA, BD, BC este o lungime dată m, iar suma proiecţiunilor aceloraşi segmente $\overline{LP}$, $\overline{PN}$, $\overline{NM}$ respectiv pe DA, DB, DC este o lungime dată n. Să se calculeze lungimile segmentelor $\overline{LP} = x$, $PN = y$, $\overline{NM} = z$ în funcţie de unghiul ascuţit α făcut de dreapta LM cu dreapta BC. Discuţie.

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 340.* Prin vârfurile B şi C ale triunghiului ABC se duc dreptele paralele Δ_b şi Δ_c. O dreaptă trecând prin A le întâlneşte în B' şi C'. Paralelele duse prin B' la AC şi prin C' la AB se întâlnesc într'un punct al laturei BC.

† N. Botea.

VIII. 341. Se dă în raport cu două axe rectangulare Ox, Oy punctul A(1, 0) şi dreapta (OB) $y = 2x$. Să se scrie ecuaţia dreptei AB şi să se afle unghiul ABO, ştiind că unghiul ABO este dublul unghiului AOB.

E. M.

VIII. 342. In triunghiul ABC dreptunghic în A, fie H proiecţia lui A pe BC, iar M, N, P trei puncte luate pe segmentele AB, AH, AC astfel ca $\overline{BM} = \overline{AN} = \overline{CP} = m$. Să se arate că există două valori pentru m astfel ca punctele M, N, P să fie în linie dreaptă. Cele două drepte MNP sunt perpendiculare una alteia în punctul I, intersecţia bisectoarelor triunghiului ABC.

G. G. C.

VIII. 343. Se dă un cerc şi două puncte M, P în planul cercului. O dreaptă Δ care trece prin M taie cercul în K, L.

N fiind mijlocul segmentului $\overline{KL}$ şi Q un punct pe NP astfel încât $\overline{QN} = \lambda\overline{QP}$, să se determine locul geometric a punctului Q când Δ se roteşte în jurul lui M.

C. I. B.

VIII. 344. Intr'un cerc se duc doi diametrii perpendiculari AB şi CD. O dreaptă variabilă ce trece prin C taie diametrul AB în M şi cercul în N. Să se afle locul geometric al intersecţiei paralelei la CD, dusă prin M, cu tangenta la cerc în N.

G. D. S.

VIII. 345. Să se arate că printre toate funcţiunile $y = f(x)$ pentru care derivata de ordinul doi este

$$y'' = -\frac{a}{(a-x)^{3/2}}$$

există o dublă infinitate care raportate la axele de coordonate ale planului, reprezintă cercuri cu centrul pe axa ordonatelor.

G. G. C.

VIII. 346. Să se calculeze:

$$\int \frac{16x^4 - 112x^5 + 300x^2 - 352x + 145}{(2x-3)^5}\,dx$$

punând polinomul dela numărător subt forma unui polinom în $(2x-3)$.

V. GH.

Toate clasele. *Exerc. 240.* Adunând sau scăzând 4 patratului unui număr prim cu 5, se obţine un număr divizibil cu 5.

I. L.

T. C. 241. Bipătratul unui număr impar este un multiplu de 16 sporit cu 1.

I. L.

T. C. 242. Care este cel mai mic număr pe care îl putem adăoga numărului 32 550 336 pentru a obține un număr perfect?

I. L.

T. C. 243. Ce schimbare suferă un produs de doi factori, dacă adunăm primului factor de $(n-1)$ ori primul factor și factorului al doilea îi scădem a n^a parte din factorul al doilea?

I. L.

T. C. 244. In ce caz produsul a două numere de același număr de cifre este egal cu produsul *complementelor*[1]) acelor numere?

I. L.

T. C. 245. In ce caz raportul a două numere de același număr de cifre este egal cu raportul *complementelor* acelor numere?

I. L.

T. C. 246. Să se rezolve ecuația

$$x^4 + 4^y = 1939$$

în cazul când y este un întreg pozitiv, iar x oarecare.

V. GH.

PREMII

Cercetându-se activitatea corespondenților, din al V-lea an, al *Suplimentului Gazetei Matematice*, s'a hotărît premierea pe clase, a următorilor elevi:

Clasa IV-a[2]): PAULIAN N. FLOREA (lic. Spiru Haret, București), NISTOR I. IOAN (lic. Moise Nicoară, Arad), POPA T. TEODOR (lic. Moise Nicoară, Arad) și CONSTANTINESCU EMIL (lic. Gh. Șincai, București).

1) Prin *complementul unui număr* se înțelege diferența dintre 10^n și acel număr, n fiind numărul cifrelor acelui număr.

2) Clasele urmate anul trecut.

Vor primi ca premiu, Culegerea de Probleme de Algebră, partea I-a de A. G. IOACHIMESCU şi un volum vechiu al *Gazetei Matematice.*

Clasa V-a. SOTIRIU G. TEODOR (lic. Mircea cel Bătrân, Constanţa), CRISTEA I. CONSTANTIN (lic. militar Regele Ferdinand I, Chişinău), MUSCELEANU VINICIUS (lic. I. Asan, Caracal), DRĂGHICESCU P. PAUL (lic. militar G-ral Makarovici, Iaşi) şi LEUCA ELENA (lic. Carabela, Târgovişte).

Vor primi ca premiu, Culegere de Probleme de Trigonometrie, partea I-a şi a II-a, de V. CRISTESCU şi un volum vechi al *Gazetei Matematice.*

Clasa VI-a: BARBAIANI IOAN (lic. Internat, Iaşi), PETRESCU I. IULIAN (lic. Gh. Lazăr, Bucureşti, GLIGOR IOAN (lic. Moise Nicoară, Arad), NICULESCU CR. MIRCEA (lic. T. Maiorescu, Bucureşti), BÂRLEA G. VICTOR (lic. militar M-rea Dealu).

Vor primi ca premiu, Culegere de Probleme de Algebră, partea II-a, de A. G. IOACHIMESCU şi un volum vechi al *Gazetei Matematice.*

Clasa VII-a: VASILESCU-STABU AL. MIRCEA (lic. Gh. Lazăr, Bucureşti), CHECIAN N. ANA (lic. Carmen Sylva, Timişoara).

Vor primi ca premiu, Culegere de Probleme de Geometrie Analitică de G. ŢIŢEICA, Culegere de Probleme de Algebră, partea II-a, de A. G. IOACHIMESCU şi un volum vechi al *Gazetei Matematice.*

Clasa VIII-a: EFTIMIE D. CRISTEA (lic. Gh. Lazăr, Bucureşti), GERNOVODEANU I. IOAN (lic. Sp. Haret, Bucureşti), CETĂŢEANU N. STELIAN (lic. Gh. Şincai, Bucureşti), STĂNCULESCU I. MIRCEA (lic. Sp. Haret, Bucureşti), CÂMPEANU ELVIRA (lic. Pr. Ileana, Turnu-Severin).

Vor primi ca premiu, Culegere de Probleme de Aritmetică de I. IONESCU, Curs de Geometrie Analitică, fasc. IV-a de TR. LALESCU şi Calcul diferenţial de A. ANGELESCU.

REDACŢIA.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuș, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se vor scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Nume de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . .Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . .Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . .Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . .Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . .Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . .Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. — C. 58.782

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 3 1 DECEMVRIE 1939

BIBLIOTECA CENTRALA
„ASOCIAŢIUNII"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 3 — 1 DECEMVRIE 1939

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 437. Se dau două cercuri concentrice* (C) *şi* (C') *de raze respectiv* r *şi* R *şi centru* O. *Fie* A *un punct pe cercul* (C). *Dreapta* OA *taie cercul* (C') *în* B. *Să se determine pe* AB *un punct* D *astfel încât lungimea cercului de rază* OD, *adunată cu lungimea cercului* (C) *şi cu* $\overline{AD}$, *să dea lungimea cercului* (C') *plus* $\overline{DB}$.

C. I. B.

Notăm $\overline{OD} = x$. Ecuaţia problemei este

$$2\pi x + 2\pi r + \overline{AD} = 2\pi R + \overline{DB}.$$

Insă

$$\overline{AD} = x - r \quad , \quad \overline{DB} = x - R,$$

deci ecuaţia se scrie

$$2\pi x + 2\pi r + x - r = 2\pi R + x - R$$

sau

$$2\pi x + (2\pi - 1)\, r = (2\pi - 1)\, R$$

$$\therefore \quad 2\pi x = (2\pi - 1)\,(R - r).$$

Rezultă

$$x = \frac{(2\pi - 1)\,(R - r)}{2\pi}.$$

IV. 438. Adăugând 1 lățimii unui paralelipiped dreptunghiu găsim lungimea; adăugând 7 găsim înălțimea; adăugând 3 găsim muchia unui cub a cărui diagonală este egală cu diagonala paralelipipedului. Să se afle lățimea.

C. I. B.

Notând x lățimea paralelipipedului, lungimea este $x+1$, înălțimea $x+7$, iar muchia cubului este $x+3$. Cum într'un paralelipiped dreptunghiu patratul diagonalei este egal cu suma patratelor celor trei dimensiuni, avem:

$$x^2+(x+1)^2+(x+7)^2=d^2,$$

$$(x+3)^2+(x+3)^2+(x+3)^2=d^2,$$

unde d este lungimea comună diagonalei paralelipipedului și cubului. Deci

$$x^2+(x+1)^2+(x+7)^2=3(x+3)^2$$

sau

$$3x^2+16x+50=3x^2+18x+27$$

$$\therefore\ 2x=23\ ,\quad \text{deci}\quad x=\frac{23}{2}.$$

IV. 445. Să se rezolve sistemul:

$$3\cdot\frac{x+1}{y-2}-7\left(\frac{x+2}{y-3}-1\right)=10$$

$$5\left(\frac{x+1}{y-2}-3\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{y-3}+6\right)=9.$$

C. I. B.

Notăm

$$\frac{x+1}{y-2}=u\ ,\quad \frac{x+2}{y-3}=v.$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} 3u - 7(v-1) = 10 \\ 5(u-3) - \frac{1}{2}(v+6) = 9 \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} 3u - 7v = 3 \\ 10u - v = 54. \end{cases}$$

Găsim:

$$u = \frac{375}{67} \quad , \quad v = \frac{132}{67}$$

şi astfel

$$\frac{x+1}{y-2} = \frac{375}{67} \quad , \quad \frac{x+2}{y-3} = \frac{132}{67}$$

sau:

$$\begin{cases} 67x - 375y = -817 \\ 67x - 132y = -530. \end{cases}$$

Se scade prima ecuaţie din a doua,

$$243y = 287 \quad \therefore \quad y = \frac{287}{243}.$$

Inlocuind această valoare a lui y în una din cele două ecuaţii se află x.

Clasa VII-a. *Exerc. 409. Să se determine valoarea lui* n *(întreg şi pozitiv) astfel încât să avem:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+a_1)^4 + (2x+a_2)^4 + \ldots + (nx+a_n)^4}{(b_1 - x^2)^2 + (b_2 - 2x^2)^2 + \ldots + (b_n - nx^2)^2} = 11\frac{4}{5}.$$

(Enunţ corectat). V. GH.

Cel mai mare exponent al lui x, la numărător ca şi la numitor, este 4. Raportul coeficienţilor lui x^4 este:

$$\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{1^2+2^2+\ldots+n^2}=\frac{\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$=\frac{3n^2+3n-1}{5}=\frac{59}{5}.$$

Rezultă $n=4$, singura valoare acceptabilă.

VII. 418. Se dă polinomul:

$$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x^1+a_m x^0.$$

Permutând exponenţii în toate modurile posibile se obţin n *funcţiuni* $y_1, y_2, \ldots, y^n$.

Să se demonstreze formula:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{(m)}=(m!)^2\sum_{j=0}^{m}a_j.$$

(Enunţ corectat). V. Gh.

Avem $n=(m+1)!$. Sunt $m!$ funcţiuni care încep cu

$$a_0x^m\ ;\ m!\ ,\ \text{cu}\ a_1x^m\ ;\ \ldots\ ;\ m!\ ,\ \text{cu}\ a_m x^m.$$

Derivându-le de m ori pe fiecare dintre aceste n funcţiuni şi adunând toate rezultatele obţinute găsim:

$$(m!)\ (m!\ a_0)+(m!)\ (m!\ a_1)+\ldots+(m!)\,(m!\ a_m)=(m!)^2\sum_{j=0}^{m}a_j.$$

Clasa VIII-a. *Exerc. 301. O placă materială în formă de patrat,* ABCD, *de latură* l, *se compune din patru triunghiuri:* AOD, DOC, COB, BOA *de densităţi respective* δ, 2δ, 3δ, 4δ; O *fiind centrul patratului. Să se determine poziţia centrului de greutate* G *al patratului.*

V. Gh.

Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor, în ordinea arătată în enunț. In aceste puncte avem aplicate forțele:

$$P_1 = \frac{l^2}{4}\delta \quad , \quad P_2 = \frac{l^2}{4}2\delta \quad , \quad P_3 = \frac{l^2}{4}3\delta \quad , \quad P_4 = \frac{l^2}{4}4\delta.$$

Centrele de greutate ale celor patru triunghiuri sunt situate pe liniile mediane ale patratului, paralele cu laturile. Centrul de greutate al forțelor P_1 și P_3 se găsește pe segmentul $\overline{G_1G_3}$ în punctul G' astfel încât să avem:

$$\frac{\overline{G'G_1}}{\overline{G'G_3}} = 3;$$

deasemeni centrul forțelor paralele P_2 și P_4 este punctul G'', situat pe $\overline{G_2G_4}$ și astfel încât

$$\frac{\overline{G''G_2}}{\overline{G''G_4}} = 2.$$

Calculând obținem

$$\overline{OG'} = \frac{l}{6} \quad \text{și} \quad \overline{OG''} = \frac{l}{3},$$

G' fiind situat la dreapta lui O, iar G'' dedesubt.

In fine, centrul de greutate G al patratului se află pe segmentul G'G'', între G' și G'' astfel încât să avem:

$$\frac{\overline{GG''}}{\overline{GG'}} = \frac{P_1 + P_3}{P_2 + P_4} = \frac{2}{3}.$$

Prin calcul se obține

$$\overline{G'G''} = \frac{l\sqrt{5}}{6} \quad , \quad \overline{GG''} = \frac{l\sqrt{5}}{15}.$$

Se observă că G cade în interiorul regiunii AOB, deoarece OB taie pe $\overline{G'G''}$ în punctul M având

$$\overline{G''M} = \frac{l\sqrt{5}}{9} \quad \text{deci} \quad \overline{G''G} < \overline{G''M}.$$

Toate clasele. *Exerc. 221. Se cere să se găsească numărul* abcd *al cărui produs cu 6 este* decba.

GH. B.

Fie

$$N = abcd \qquad M = decba.$$

Conform enunţului

$$6N = M = 6 \times abcd = decba. \tag{1}$$

Efectuând înmulţirea trebue să avem:

$$6 \times d = 10\varepsilon_1 + a$$

unde $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant 5$ căci avem:

cel puţin $6 \times 0 = 0$

cel mult $6 \times 9 = 50 + 4.$

Apoi

$$6 \times c + \varepsilon_1 = 10 \times \varepsilon_2 + b$$

unde ε_2 este cel mult 5, şi din aproape în aproape

$$6 \times a + \varepsilon_3 = de. \tag{2}$$

Observ din (1) că a este pereche şi că unimele produsului $6 \times d$ este tocmai cifra d.

Acum fac în (2) pe a egal succesiv cu toate cifrele perechi semnificative, pentrucă altfel N nu ar fi de 4 cifre.

La fiecare valoare a lui a dau lui ε_3 toate valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5 şi obţin

$a = 2$; $6a + \varepsilon_3 = 12, 13, 14, 15, 16$ sau $17 = de$

$\therefore \quad d = 1$, dar 6×1 nu se termină în $a = 2$.

$a = 4$; $6a + \varepsilon_3 = 24, 25, 26, 27, 28$ sau $29 = de$

$\therefore \quad d = 2$, dar 6×2 nu se termină cu 4.

$a = 6$; $6a + \varepsilon_3 = 36, 37, 38, 39, 40$ sau $41 = de$

$\therefore \quad d = 3$ sau $d = 4$ inacceptabile.

$a = 8$; $6a + \varepsilon = 48, 49, 50, 51, 52,$ sau $53 = de$

$\therefore \quad d = 4$ sau 5, inacceptabil.

Rezultă că nu există numere M şi N în condiţiile enunţului.

T. C. 232. Să se găsească numărul întreg N *știind că dacă după el se scrie* $2N+1$ *se obține patratul lui* $3N-1$.

GH. B.

Fie n numărul cifrelor lui $2N+1$. Conform enunțului trebue să avem

$$N \times 10^n + 2N + 1 = (3N-1)^2$$

$$\therefore \quad 10^n + 8 = 9 \times N$$

$$\therefore \quad N = \frac{100\ldots08}{9} = 11\ldots112.$$

Exemple. $n=1$, $N=2$, $2N+1=5$, $3N-1=5$

$$25 = 5^2$$

$n=2$, $N=12$, $2N+1=25$, $3N-1=35$

$$1225 = 35^2$$

. . . . . etc.

T. C. 233. Se cere numărul N *știind că patratul lui* $3N-1$ *se obține scriind după* $2N+1$ *pe* N.

GH. B.

Fie n numărul cifrelor lui N. Conform enunțului avem:

$$(2N+1)\,10^n + N = (3N-1)^2$$

$$\therefore \quad 9N^2 - (2 \cdot 10^n + 7)\,N - (10^n - 1) = 0. \qquad (1)$$

Realizantul acestei ecuații în N este

$$(2 \cdot 10^n + 7)^2 - 36\,(10^n - 1) = 4 \cdot 10^{2n} + 8 \cdot 10^n + 85.$$

Observ că dacă $n > 1$, acest număr se termină cu 85, iar dacă $n = 1$ realizantul este 565. Dar numerele terminate în 85 și în 65 *nu sunt patrate perfecte*. Deci ecuația (1) nu are rădăcini reale și prin urmare nu există numere N în condițiile problemei.

Până la 5 Noemvrie s'au primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numărul 1 și 2 anul VI, dela[1]):

Școala Centrală de fete București.

Clasa IV-a: Braslă Elisa (IV: 452), Dumitrescu Alexandra (IV: 452), Duța Silvia (IV: 433, 52, 7, 61), Ghiulamila Angela (IV: 452, 3), Laurian Michaela (IV: 452, 3), Motaș Rodica (IV: 452, 3), Neagu Georgeta (IV: 452, 7*), Niculescu Sanda (IV: 457*, 61), Popescu Angela (IV: 452, 3), Popescu Niculina (IV: 452, 7, 61), Posdărescu Ligia (IV: 453, 61), Rădulescu Ecaterina (IV: 452), Sălăgeanu Elisa (IV: 452, 3), Stătescu Dora (IV: 457, 61), Teodorescu Viorica (IV: 452, 3, 61).

Clasa VII-a: Atanasiu Melania (VII: 448, 52*), Ceuda Elena (VII: 448, 52), Chelsean L. (VII: 448, 52), Creangă M. (VII: 448, 52), Dimoftache Corina (VII: 448, 52), Dinu Elena (VII: 448, 52), Filipescu Gh. Maria (VII: 448, 452*), Gaster C. E. A. (VII: 448, 52), Gafta Margareta (VII: 448, 52), Gurău Ionica (VII: 448, 52), Halunca Speranța (VII: 448, 52), Ionescu C. Marietta (VII: 448, 52), Mangali Ortansa (VII: 452), Peristeri Maria (VII: 452), Perker Josefina (VII: 448, 52), Petroșanu Virginia (VII: 448, 52), Saveliew Maria (VII: 448, 52), Statache I. (VII: 448, 52), Rădulescu N. Ec. (VII: 448), Wlarga Ortansa (VII: 448).

Liceul „Carmen-Sylva" București.

Clasa III-a: Ispas Eleonora (III: 100).

Clasa IV-a: Damian Lucia (IV: 452, 3), Iorgulescu Gabriela (IV: 452).

Clasa V-a: Gabrielescu Elena (V: 531).

Clasa VI-a: Vasilescu Alexandra (VI: 527*).

Clasa VII-a: Crasoveanu Lucia (VII: 446, 9, 53, 4), Haralamb Elena (VII: 448, 52), Vasiliu Margareta (VII: 446, 7, 51*, 3).

Clasa VIII-a: Niculescu C. Mona (VIII: 337).

Liceul „Aurel Vlaicu" București.

Clasa IV-a: Dan Maria (IV: 457, 60*).

Clasa VI-a: Dan Georgeta (VI: 527).

Liceul „Regina Maria" București.

Clasa IV-a: Iliescu Gh. Viorica (IV: 451*).

Liceul de fete Bacău.

Clasa VIII-a: Papadopol Dumitra Elena (VIII: 335, 6, 8*).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Liceul de fete Focşani.

Clasa VII-a: Lăduncă Gabriela (VII: 448, 9, 52).

Liceul de fete Râmnicu-Vâlcea.

Clasa VII-a: Jurcan Sofia (VII: 448, 50, 2).

Liceul „Carmen-Sylva" Timişoara.

Clasa VI-a: Clouşe Constanţa (VI: 452, 3, 4, 7, 8), Remenyi Maria (VI: 452, 3*, 4, 7, 8), Roşu Gliheria (VI: 452, 3*, 4, 7, 8).

Clasa VII-a: Ionescu Lucia (VII: 447, 51*), Leibovics Annie (VII: 451, 2), Mang Ileana (VII: 446, 8, 53, VIII: 335, 7, 40*, 6), Pleşa Ileana (VII: 446, 7, 8, 51*, 2), Severineanu Maria (VII: 446, 7, 8).

Clasa VIII-a: Adler Edith (VIII: 339, 40*, 36), Checian Ana (VIII: 337, 9, 40*, 6).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa VII-a: Krauss R. (VII: 455), Moscovici E. (VII: 447, 52), Nicolau C. (VII: 446*, 7, 9, 50, 1, 2), Richard V. K. (VII: 451, 3).

Clasa VIII-a: Teodoroff Şt. (VIII: 346).

Liceul „Mihaiu Viteazul" Bucureşti.

Clasa VII-a: Beno Marcus (VIII: 447, 8, T. c.: 234).

Clasa VIII-a: Brezeanu C. (VIII: 337*).

Liceul „Titu Maiorescu" Bucureşti.

Clasa VII-a: Niculescu C. M. (VII: 453, VIII: 336, 7*, 8, 9, 44, 46, T. c.: 246), Parteniu C. M. (VII: 446).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a: Dimos Fl. (IV: 452, 5, 7, 8, 60, 1), Ionescu D. (IV: 452, 3, 7, 8, 60*).

Clasa V-a: Stoika V. (V: 532, 6).

Clasa VI-a: Botez V. Radu (VI: 526*).

Clasa VII-a: Ciurescu F. (VII: 448, 53).

Clasa VIII-a: Gârneţiu J. L. (VIII: 335), Ghiţescu M. (VIII: 337*, 38).

Liceul „Sf. Gheorghe" Bucureşti.

Clasa VI-a: Andonie I. (VI: 527*, 8, 32, VII: 453, T. c.: 246).

Liceul „Sft. Andreiu“ Bucureşti.

Clasa VII-a: Haid J. (VII: 448, 9, 51*, 2, 3, 5), Juster M. (VII: 448, 50, 1, 2, 3, 5, T. c.: 234), Ortemberg E. (VII: 448, 9, 50, 1*, 2, 3, 5), Senchi E. (VII: 447, 8, 55), Ştefanovici M. (VII: 453, 4, 9, T. c.: 236), Vasilescu I. (VII: 446, 7, 8, 51, 2, 3), Weber F. (VII: 447, 8, 51, 2, 3, 5), Voiculescu C. (VII: 448, 50, 1, 2, 3, 5).

Liceul „M. Eminescu“ Bucureşti.

Clasa V-a: Protopescu V. (V: 536).
Clasa VIII-a: Leibovici S. (VIII: 340).

Liceul „Profesorii Asociaţi“ Bucureşti.

Clasa V-a: Klaudiu Ad. (V: 532, 7).
Clasa VII-a: Marcusohn O. (VII: 453, 5).

Liceul „M. Basarab“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Alexandru C. (IV: 535), Alexandrescu S. (IV: 457), Grumberg S. (IV: 452), Lazăr St. (IV: 452, 3*, 7), Mateescu D. (IV: 457), Stoenescu Gh. (IV: 457).
Clasa V-a: Alexandrescu C. (V: 531, 6), Bercovici L. (V: 537), Buescu (V: 537), Saiovici E. (V: 531, 7), Sternberg (V: 531, 7).

Liceul „S. Haret“ Bucureşti.

Clasa V-a: Teodorescu A. (V: 527*, 32, 5, 7, 8*).
Clasa VII-a: Alexandrescu M. (VII: 447, 8, 52), Andreescu (VII: 447, 8, 51*), Blank E. (VII: 452), Mişu A. (VII: 446*).
Clasa VIII-a: Grigoriu D. (VIII: 335, 6, 40*), Racoviceanu V. (VIII: 335, 6, 7, 8*, 9), Şeibulescu C. (VIII: 335, 6, 7*, 8*).

Liceul „Mihaiu Viteazul“ Alba-Iulia.

Clasa VII-a: Bartha L. (VII: 453).

Liceul „M. Nicoară“ Arad.

Clasa V-a: Schwartz L. (V: 537).

Liceul „Codreanu“ Bârlad.

Clasa VII-a: Atanasiu A. (VII: 446, 8, 51).

Liceul „T. Laurian“ Botoşani.

Clasa VII-a: Munteanu F. (VII: 447, 8, 50, 1*), Riza M. (VII: 446, 8, 51*).

Liceul „N. Bălcescu“ Brăila.

Clasa VI-a: Udrea I. (VI: 521).
Clasa VII-a: Bălănescu V. (VII: 447, 8, 50, 1, 2).

Liceul „A. Odobescu“ Bistrița.

Clasa VIII-a: Boariu C. (VIII: 335).

Liceul „A. Șaguna“ Brașov.

Clasa VII-a: Badea I. (VII: 454, T. c.: 246).

Liceul „Sft. Vasile“ Blaj.

Clasa IV-a: Balea I. D. (IV: 455*).

Liceul „I. Meșotă“ Brașov.

Clasa IV-a: Dumitrașcu O. (IV: 452, 4), Ilie D. (IV: 460), Iordan I. (IV: 452), Ouatu I. (IV: 452), Pantelimon C. (IV: 452), Pipu N. (IV: 454), Trandafirescu Th. (IV: 452).
Clasa VII-a: Stere D. (VII: 452).

Liceul „Știrbey Vodă“ Călărași.

Clasa VII-a: Bordușan P. (VII: 446, 7, 8, 9), Iancu G. (VII: 448, 52, 3), Ionescu V. (VII: 448, 9, 52, 3, VIII: 340), Mateescu I. (VII: 452, 3), Nicolescu N. (VII: 452, 3), Petrescu P. (VII: 452, 3), Rădulescu (VII: 446, 53).

Liceul „Ioniță Assan“ Caracal.

Clasa VII-a: Ionescu I. (VII: 448, 50, 2).

Liceul militar „Ștefan cel Mare“ Cernăuți.

Clasa IV-a: Cortușan C. I. (IV: 452, 7, 61), Nicolăescu (IV: 452), Staicu C. (IV: 452, 7, 61), Vasiliu D. (IV: 452, 7, 61).
Clasa VI-a: Neagu I. (IV: 521, 22, 7).

Liceul militar „Regele Ferdinand I“ Chișinău.

Clasa VI-a: Bouncă A. (VI: 521, 5*), Cristea C. (VI: 521, 5), Harea (VI: 521), Mănescu N. (VI: 521), Moise I. (VI: 521), Pacioglu C. (VI: 521), Romanovski V. (VI: 521), Vulpe N. (VI: 521).
Clasa VII-a: Bidivan I. (VII: 448), Ilie N. (VII: 448, 52), Ionescu C. (VII: 448, 52), Jalbă L. (VII: 447, 8, 52), Moldoveanu D. (VII: 448, 52), Petcu V. (VIII: 337, 8*), Smolenski Al. (VII: 448, 52), Vesa V. (VII: 448, 452).
Clasa VIII-a: Anghelescu D. (VIII: 338*), Bazar N. (VIII: 337, 8), Pop C. (VIII: 338*), Popescu I. (VIII: 337, 8), Savin (VIII: 337, 8), Todirică (VIII: 338*), Toma V. (VIII: 338*), Vlăsceanu V. (VIII: 338).

Liceul „Gh. Barițiu" Cluj.

Clasa VIII-a: Fenics O. (VIII: 336, 41*), Herșcovici O. (VIII: 335), Hirsh A. (VIII: 336).

Liceul Școalei Normale Superioare Cluj.

Clasa VII-a; Marinescu P. (VII: 448, 52).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanța.

Clasa VI-a: Sotiriu Th. (VI: 451, 2, 3, 6).

Liceul „Frații Buzești" Craiova.

Clasa IV-a: Marian D. (IV: 452, 3, 4).
Clasa VI-a: Barbian G. (VI: 521, 6), Ionescu S. T. (VI: 526).

Liceul „Unirea" Focșani.

Clasa VIII-a: Nicoară T. (VIII: 333, 5, 6, 7, 8*).

Liceul „V. Alecsandri" Galați.

Clasa VII-a: particular: Abeles Fl. (VII: 447, 9, 52).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VII-a: Petrescu Gh. (VII: 447, 52, 3, VIII: 336).
Clasa VIII-a: Văduva F. M. (VIII: 336).

Liceul „Internat" Iași.

Clasa VI-a: Cerbureanu P. (VI: 521), Manoliu V. (VI: 521, 7*), Manolache (VI: 452), Mircea Tr. (VI: 521).
Clasa VII-a: Berechet M. (VII: 446, 7, 8, 52).

Liceul „Național" Iași.

Clasa VII-a: Mateș L. (VII: 447, 8, 52, 3), Roitman (VII: 447, 8, 52, 3).
Clasa VIII-a: Șvaibman S. (VIII: 335, 6, 8*).

Liceul militar „General Makarovici" Iași.

Clasa III-a: Brighiu C. (III: 94), Edu C. E. (III: 95).
Clasa V-a: Iordănescu P. (V: 536).
Clasa VI-a: Bogdan G. (VI: 525, 7, 30, 1, 4), Carp M. (VI: 525, 7, 1), Dimitriu (VI: 525), Drăghicescu (VI: 525, 7, 30, 1. 2, 4, T. c.: 246), Eliade V. (VI: 521, 7, 30, 1, 4, VII: 52, T. c.: 246), Iliescu T. (VI: 521, 7, 30, 1), Ivan Z. (VI: 525, 7, 31, T. c.: 246), Popovici M. (VI: 525), Ivan Z. (VI: 525, 7, 1, T. c.: 246), Stamate A. (VI: 525, 7, 30, VII: 452).

Clasa VII-a: Atanasiu V. (VII: 446, 7, 8, 52), Brotea (VII: 446), Bârzu S. (VII: 446, 7, 8, 52), Hagiu R. (VII: 447), Şerbănescu (VII: 446).
Clasa VIII-a: Jiletcovici Al. (VIII: 340, 4, T. c.: 246).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel" Ploeşti.

Clasa IV-a: Dorna C. (IV: 452), Efghenide C. (IV: 452, 4), Jupceanu N. (IV: 452, 7, T. c.: 237), Ştefănescu M. (IV: 452, 3), Vintilescu (IV 452, 3).
Clasa V-a: Weitzman Iancu (V: 447, 8).
Clasa VI-a: Pandelescu I. (VI: 526, 32).

Liceul „A. Lahovary" Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VI-a: Andreescu I. (VI: 521, 7*, VII: 452).

Liceul „Principele Nicolae" Sighişoara.

Clasa VII-a: Tănăsescu N. (VII: 452).
Clasa VIII-a: Roşeală Gh. (VIII: 335, 40, 1, 4).

Liceul militar „Mihai Viteazu" Târgu-Mureş.

Clasa III-a: Vineş C. (III: 93).
Clasa IV-a: Buracu (IV: 452), Rafiroiu R. (IV: 521).
Clasa V-a: Vonicu (V: 531).
Clasa VI-a: Buzoianu (VI: 521), Rădulescu (VI: 454), Zaharia C. (VI: 527).
Clasa VIII-a: Huianu (VIII: 337, 8*), Mihăilescu (VIII: 338), Mironescu D. (VIII: 337, 38*), Pănoiu I. (VIII: 335, 7, 8*), Pantelimon C. (VIII: 335, 7, 8), Paraipan C. (VIII: 338*), Topalescu G. (VIII: 338*, T. c.: 246).

Liceul militar „N. Filipescu" Târgovişte.

Clasa V-a: Brătăşeanu C. (V: 531), Bunescu G. (V: 531), Ceauşelu (V: 531), Dumitrescu D. (V: 531), Filipedescu M. (V: 531), Gheorghiu Marius (V: 531), Ionescu B. (V: 531), Iordănescu P. (V: 531), Petrescu Ş. (V: 531), Stoianovici (V: 525, 31, 6), Ţinculescu N. (V: 531), Vitănescu C. (V: 531), Vlădoianu (V: 531).
Clasa VII-a: Andronescu A. (VII: 447), Bărbulescu V. (VII: 447). Bârlea V. (VII: 447, 8, 51*, 2), Bertoiu (VII: 447, 8), Ceangelu C. (VII, 447), Chintescu M. (VII: 447, 8), Cristescu V. (VII: 448), Dragomir (VII: 448), Georgescu F. (VII: 447, 8), Ghengelea (VII: 447, 8), Lăcătuş (VII: 448, 52), Lupoaie Fl. (VII: 447), Mândrescu A. (VII: 447, 8), Mastero (VII: 448), Nicolăescu M. (447, 8), Popescu C. (VII: 448), Popescu L. (VII: 448), Predoiu N. (VII: 447, 8), Rudeanu L. (VII: 447), Şerbănescu Şt. (VII: 447), Şerban C. (VII: 448, 52), Vijelie (VII: 448), Wastero L. (VII: 452).

Liceul „C. Diaconovici Loga“ Timişoara.

Clasa V-a: Rădoiu N. (V: 527, 36, 7),
Clasa VII-a: Bakonyi C. (VII: 447, 8, 9, 51*, 2*, 3, 4, 5, T. c.: 234).
Clasa VIII-a: Haufman I. (VIII: 334, 5, 6, 8).

Liceul „Traian“ Turnu-Severin.

Clasa IV-a: Dumitrescu Tr. (IV: 452, 7, 8, V: 537), Perfeloagă N. (IV: 452).
Clasa VI-a: Corâci C. (VI: 450, 2*, VI: 527, 32, 4), Iorgulescu M. (VI: 525, 527*).
Clasa VII-a: Mihail Gh. (VII: 450, 1, 3, 6).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Martie 1940

Clasa III-a. *Exerc. 102.* Fie A', B' punctele în care medianele AM, BN ale triunghiului ABC întâlnesc cercul ABC şi fie AA_1, BB_1 două înălţimi ale triunghiului. Avem

$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} \cdot \overline{AA_1^2} = \overline{NB} \cdot \overline{NB'} \cdot \overline{B_1B_1^2}.$$

C. I. B.

III. 103. Să se determine numărul necunoscut x, astfel ca

$$\frac{16+x}{37+x} = \frac{16}{22}.$$

N. M.

III. 104. Să se găsească două numere al căror raport este $\frac{5}{2}$, iar dacă scădem din primul dublul celui de-al doilea, găsim 3.

E. M.

III. 105. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci avem şi

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{ab}{cd} \; ; \; \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2} = \frac{ab}{c.d} \; ; \; \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{b^2}{d^2} \; ; \; \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

E. M.

III. 106. Să se arate că numărul

$$59^2 + (3 \times 51) - 31$$

este patrat perfect, extrăgându-i rădăcina.

Acelaşi lucru pentru numărul

$$69^2 + 19^2 + 15^2 + 7^2 + (15 \times 16).$$

A. V. N.

III. 107. Numărul

$$49^3 + 21^3 + 20^3 + 9^3 + (13 \times 94)$$

este un patrat perfect.

A. V. N.

III. 108. Să se calculeze

$$\sqrt[4]{1939} \quad \text{şi} \quad \sqrt[4]{101 + \sqrt{1001}}$$

cu două zecimale exacte.

V. Gh.

Clasa IV-a. *Exerc. 463.* In trapezul dreptunghiu ABCD (AB şi DC baze), laturile neparalele se întâlnesc în M astfel că $\overline{MA} = \frac{2}{3}\overline{AD}$. Ştiind că diferenţa bazelor este *6 cm,* iar $\overline{BC} = 10\,cm$, să se afle aria trapezului.

E. M.

IV. 464. Să se efectueze

$$\frac{a+b-\frac{4ab}{a+b}}{a-b+\frac{4ab}{a-b}} : \frac{1-\frac{2ab}{a^2+b^2}}{1+\frac{2ab}{a^2+b^2}}.$$

E. M.

IV. 465. Să se arate că

$$(1+x+2x^3)^2-(1+x+2x^2)^2=4x^2(x^4-1).$$

N. M.

IV. 466. Să se verifice identitatea

$$(bx-ay)^2\,cz-(cy-bz)^2\,.\,ax-(az-cx)^2\,by\equiv$$
$$\equiv(bx+ay)\,(cy-bz)\,(az-cx).$$

G. D. S.

IV. 467. Să se verifice identitatea:

$$(a+x)(c+y)(b+z)+(b+x)(a+y)(c+z)+(c+x)(b+y)(a+z)\equiv$$
$$\equiv(a+x)(a+y)(a+z)+(b+x)(b+y)(b+z)+(c+x)(c+y)(c+z)-$$
$$\frac{1}{2}(a+b+c-x+y+z)\,[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

C. I. B.

IV. 468. Fiind dat un plan P, un punct A în acest plan şi o perpendiculară OD pe planul P în punctul O, construim în planul P două drepte D' şi D'' simetrice în raport cu dreapta OA. Fie B şi C proiecţiunile punctului O pe dreptele D' şi D''; fie I punctul unde BC taie pe OA, iar E un punct oarecare al dreptei OD. Să se arate că patrulaterele strâmbe EICAE se bucură de proprietatea: *patratul celei mai mari laturi este egal cu suma patratelor celorlalte trei.*

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 545.* Din formula ariei unui trapez rezultă că suma ariilor a două trapeze care au aceleaşi baze este deasemenea aria unui trapez. Să se arate acest lucru cu ajutorul unei construcţii geometrice.

A. V. N.

V. 546. Fie T punctul de tangenţă a două cercuri O_1 şi O_2 de raze egale. Din T luat centru şi cu raza comună a cercurilor O_1, O_2 se descrie un cerc care le întâlneşte pe celelalte în A, B, C, D. Să se demonstreze că figura ABCD este un dreptunghiu.

GH. B.

V. 547. Fie $\overline{B'C'}$ proiecția ortogonală ale unui diametru $\overline{BC}$ al cercului de centru O pe tangenta sa într'un punct A.

Să se demonstreze că raportul ariei triunghiului ABC către aria trapezului B'BCC' rămâne constant când diametrul BC variază.

G. G. C.

V. 548. Patrulaterul ABCD are triunghiurile ABC și ACD dreptunghice și asemenea

$$(\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACB = 90^0).$$

Să se demonstreze că diagonala AC este *simediana* [1]) triunghiului BCD.

G. D. S.

V. 549. Intr'un cerc O de rază R să se ducă trei coarde de lungime date *a, b, c*, astfel ca una din ele să treacă printr'un punct dat din plan, iar toate trei să formeze un triunghiu echilateral. Discuție asupra numărului soluțiunilor.

O. N. Ț.

V. 550. Intr'un cerc dat să se construiască trei coarde, egale u o lungime dată și care să formeze un triunghiu echilateral MNP. Să se determine raportul de asemănare al triunghiului MNP și triunghiului echilateral înscris în cercul dat. Discuție. Să se găsească alte proprietăți ale figurii.

O. N. Ț.

V. 551. Să se arată că, dacă

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

avem și:

$$\frac{1}{2} \Sigma (a+b)^2 = \frac{a^4 + b^2c^2}{a^2}.$$

E. M.

---

1) Simediana unui triunghiu este simetrica medianei față de bisectoarea aceluiași vârf. Ea împarte latura opusă într'un raport egal cu raportul patratelor laturilor alăturate.

V. 552. Dacă:

$$x=\frac{nb^{m+1}-pa^{m+1}+c^i+d^k+e^r}{(n+p)\,a},\quad y=\frac{na^{m+1}-pb^{m+1}+c^i+d^k+e^r}{(n+p)\,b}$$

atunci

$$\frac{x+a^m}{y+b^m}=\frac{b}{a}.$$

A. A. R.

V. 553. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{(l-x)(l-y)}{x+y-2l}=l-a\quad;\quad\frac{(l-y)(l-z)}{y+z-2l}=l-b;$$

$$\frac{(l-z)(l-x)}{z+x-2l}=l-c.$$

C. I. B.

V. 554. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x^m+my^m}{a}=\frac{y^m+mz^m}{b}=\frac{z^m+mx^m}{c}\quad;\quad x^m+y^m+z^m=d,$$

x, y, z fiind numere reale.

V. GH.

Clasa VI-a. *Exerc. 535.* Să se verifice relația trigonometrică:

$$\left[\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c}{\operatorname{cotg}a\,\operatorname{cotg}b+\operatorname{cotg}b\,\operatorname{cotg}c+\operatorname{cotg}c\,\operatorname{cotg}a}\right]^n=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^n a+\operatorname{tg}^n b+\operatorname{tg}^n c}{\operatorname{cotg}^n a\,\operatorname{cotg}^n b+\operatorname{cotg}^n b\,\operatorname{cotg}^n c+\operatorname{cotg}^n c\,\operatorname{cotg}^n a}.$$

† N. BOTEA.

VI. 536. Să se rezolve ecuația

$$\cos 5x-\cos 4x+\sin x=0.$$

C. I. Ț.

VI. 537. Să se rezolve triunghiul dreptunghiu ABC știind că raportul catetelor este egal cu m, iar acela al lungimilor bisectoarelor unghiurilor ascuțite este n.

G. G. C.

VI. 538. Să se rezolve ecuația:

$$a^{a^{a^x}} = b^{b^b}.$$

Aplicație numerică: $a=10$, $b=5$.

G. D. S.

VI. 539. Să se rezolve ecuația:

$$\log x - \log \sqrt{2\sqrt{x^2-2}+1-\sqrt{2\sqrt[4]{x^2-2}}} + \log\sqrt{x^2-1} =$$

$$= \log\sqrt{2} + \log\sqrt{2\sqrt{x^2-2}+\sqrt[4]{4x^2-8}+1}.$$

C. I. B.

VI. 540. Să se afle trei numere în progresie geometrică, știind că ultimul este patratul primului, iar diferența extremilor este *12*.

E. M.

VI. 541. Fie ABCD un dreptunghiu dat și E un punct pe latura BC; F și H proiecțiile ortogonale ale punctului E respectiv pe diagonalele BD și AC; apoi G și I respectiv proiecțiile ortogonale ale punctelor F și H pe AC și BD. Să se determine poziția dreptei OE pentru care patrulaterul FHIG este trapez.

O. N. Ț.

VI. 542. Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = a \quad , \quad \sec\alpha + \sec\beta = b.$$

Discuție.

O. N. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 458.* Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$2a(x-bz)+(b+c)[y+(b+c-a)z]=b+c-a$$
$$2b(y-cx)+(c+a)[z+(c+a-b)x]=c+a-b$$
$$2c(z-ay)+(a+b)[x+(a+b-c)y]=a+b-c.$$

C. I. Ț.

VII. 459. Să se afle limitele expresiilor:

$$E_1=x^2-\sqrt{x^4-3x^2+1}$$
$$E_2=\sqrt{x^3+2x-1}-\sqrt{x^2+x-1}$$
$$E=\sqrt{x^4-3x+1}-\sqrt{x^4-5x-1}$$

când x tinde către ∞.

E. M.

VII. 460. Să se afle adevărata valoare a expresiilor:

$$E_1=\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}-\sqrt{4+\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\right)^2};$$

$$E_2=\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}+\sqrt{4+\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$$

pentru $x=\pm 1$.

C. I. Ț.

VII. 461. Să se arate că determinantul

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

este divizibil cu *53*, aplicând proprietățile cunoscute ale determinanților.

A. V. N.

VII. 462. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x^2+5+\sqrt[3]{ax^{10}+4x^5-2}}{7x^3+5x^2-7+\sqrt[3]{bx^{10}+2x^5-4}}.$$

C. I. B.

VII. 463. Să se determine exponentul p şi coeficienţii α, β, γ astfel în cât să avem:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ (\alpha > 0)}} \left[\sqrt{9x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 5} - (\alpha x^p + \beta x + \gamma) \right] = \frac{7}{3}.$$

G. D. S.

VII. 464. Fie

$$f(x) = \frac{a + bx}{b + ax}.$$

Să se arate că:

$$f\left[f\left(-\frac{a}{b}\right)\right] = \frac{a}{b} \quad ; \quad f\left[f\left(-\frac{b}{a}\right)\right] = \frac{b}{a}.$$

N. M.

VII. 465. Notând cu

$$f(x) \equiv 3x^2 + x - 1.$$

Să se găsească valoarea maximă a lui n (întreg) astfel ca:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) < 1200.$$

A. A. R.

VII. 466. Să se desvolte determinantul Δ într'un produs de trei factori:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - 2b & a - b & 2a - b \\ a + 2b & a + b & a + b \\ b - a & b - a & b - 2a \end{vmatrix}.$$

E. M.

VII. 467. Să se discute sistemul:

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C = 0$$
$$x \sin B + y \sin C + z \sin A = 0$$
$$x \sin C + y \sin A + z \sin B = 0$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu. Cazuri particulare: *a)* triunghiul e dreptunghiu, *b)* triunghiul e isoscel.

G. G. C.

Clasa VIII-a. *Exerc. 347.* 1°. Să se arate că pentru ca patru puncte, aşezate pe parabola $y^2 - 2px = 0$, să fie conciclice, ordonatele lor trebue să verifice relaţia:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.$$

2°. Fie A şi B două puncte fixe pe o parabolă. Un cerc variabil ce trece prin A şi B mai taie parabola în M şi N.

Ţinând seama de relaţia dela (1°), să se afle locul geometric al intersecţiei tangentelor în M şi N la parabolă.

G. D. S.

VIII. 348. Să se rezolve ecuaţiile binoame:

$$ix^4 - 2 = 0 \quad ; \quad (3 - 4i)\,x^3 + 25 = 0 \qquad (i = \sqrt{-1})$$

şi să se reprezinte afixele rădăcinilor.

V. GH.

VIII. 349. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Dacă B şi C sunt fixe, iar $\sphericalangle BHC = 3.\hat{A}$, să se afle locul geometric al vârfului A şi al ortocentrului H.

E. M.

VIII. 350. Să se arate că ecuaţia

$$x^3 - 3\lambda x^2 - 3x - 3\lambda + 2 = 0$$

are o rădăcină independentă de λ şi apoi să se rezolve. Să se studieze şi prin teorema lui ROLLE.

A. V. N.

VIII. 351. Fie OX, OY două axe rectangulare, M variabil pe o dreapta fixă ce trece prin origine şi P proiecţia lui M pe OX; cercul (O, OM) taie pe OY în N_1; N_2; paralelele din N_1, N_2 la OX, taie perpendiculara din P pe OM în M_1, M_2. Punctele M_1 şi M_2 descriu două drepte ce trec prin origine.

Dacă m_1, m_2 sunt pantele dreptelor OM_1, OM_2 şi m panta dreptei OM, avem relaţia

$$1/m_1 + 1/m_2 = -2m.$$

N. M.

VIII. 352. Fie F focarul unei parabole, M un punct pe directoare, N simetricul punctului în care FM taie parabola, luat în raport cu axa parabolei şi P un punct fix. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptelor FM, PN când M descrie directoarea şi locul ortocentrului triunghiului PFM.

C. I. B.

VIII. 353. Se dă un cerc cu raza de 4 cm, raportat la doi diametrii dreptunghiulari. Să cere să se calculeze — *printr'o integrală* — aria cercului cuprinsă între ordonatele (— 2) şi (+ 2) şi rezultatul să se compare cu cel obţinut pe calea geometriei elementare.

A. V. N.

VIII. 354. Se dă elipsa $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ şi iperbola $x^2 - y^2 = 1$ şi se cere:

1) Să se arate că au aceleaşi focare;

2) Să se găsească punctele lor de intersecţie;

3) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la elipsă şi iperbolă în unul din aceste puncte şi să se verifice că sunt perpendiculare.

A. V. N.

Toate clasele. *Exerc. 247.* Să se arate că avem:

$$3^{2^4 . 3^2 . 5} + 7^{2^4 . 3 . 5} + 11^{2^4 . 3^2} + 13^{2^3 . 3 . 5} - 4 = \mathcal{M}_{\cdot} 3 . 7 . 11 . 13.$$

I. L.

T. C. 248. Să se arate că avem:

$$70^{10} + 110^6 + 154^4 + 384 = \mathcal{M}_{\cdot} 770.$$

I. L.

T. C. 249. Câte numere prime de două cifre sunt, cărora adunându-le 1 se împart exact cu 3 şi scăzându-le 1 se împart exact cu 5?

I. L.

T. C. 250. Care este cea mai mare diferență între două numere prime consecutive de câte trei cifre?

I. L.

T. C. 251. Dacă dintr'un număr format cu patru cifre consecutive scădem răsturnatul lui, diferența este 3087. Care este acel număr?

I. L.

T. C. 252. Care sunt numerele de forma ab, ba al căror cel mai mare comun divizor este $a + b$.

E. M.

T. C. 253. Un număr de patru cifre divizat cu 7 dă restul 1 și cu 13 dă restul 3; care este acel număr?

I. L.

T. C. 254. Ce valori poate lua n întreg și pozitiv, pentru ca să avem

$$1940^n + n \equiv \mathcal{M}\, 1941.$$

I. L.

T. C. 255. Există numere prime de patru cifre de forma:

$$(1940a + b)?$$

I .L.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuş, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se vor scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, însoţit de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluţiilor se pot vedea indicaţiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Ţiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. — C. 59.333

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 4 1 IANUARIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALA „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 4 — 1 IANUARIE 1940

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 455.* 1) *Calculul lui* $\overline{AC}$.
Din triunghiul dreptunghiu ABC, avem:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}\right)^2 - (\sqrt{5}-1)^2 = \frac{32}{(\sqrt{5}+1)^2} - (\sqrt{5}-1)^2 =$$

$$= \frac{32-(\sqrt{5}-1)^2(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{32-[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)]^2}{(\sqrt{5}+1)^2} =$$

$$= \frac{32-[(\sqrt{5})^2-1]^2}{(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{32-16}{(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{16}{(\sqrt{5}+1)^2}.$$

Deci

$$\overline{AC} = \frac{4}{\sqrt{5}+1}.$$

Cum

$$\overline{CD} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1},$$

rezultă

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \frac{4}{\sqrt{5}+1} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1} = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}.$$

2) Să notăm G mijlocul lui $\overline{DB}$, F piciorul perpendicularei dusă din E pe AB şi H punctul de întâlnire al dreptelor AD, EB. Din asemănarea triunghiurilor HAB, EFB, rezultă

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{BA}} \quad \therefore \quad \overline{BE} = \frac{\overline{BH} \times \overline{FB}}{\overline{BA}}.$$

Calculul lui $\overline{FB}$. E fiind situat pe bisectoarea unghiului ABD, triunghiurile EFB, GEB sunt egale, deci

$$\overline{FB} = GB = \frac{\overline{DB}}{2}.$$

Dar din triunghiul dreptunghiu DAB, rezultă

$$\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2.$$

$$\overline{DB}^2 = (\sqrt{5}-1)^2 + \frac{16(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)]^2 + 16(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{5}+1)^2} =$$

$$= \frac{16 + 16(3+2\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{16(4+2\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+1)^2} \quad \therefore$$

$$\overline{DB} = \frac{4\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Deci

$$\overline{FB} = \frac{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Pe $\overline{BH}$ îl calculăm din triunghiul AHB, după ce vom fi cunoscut pe AH. Se ştie că bisectoarea unui unghiu împarte latura corespunzătoare în segmente proporţionale cu laturile adiacente :

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}},$$

de unde

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}+\overline{DB}} \quad \therefore \quad \overline{AH} = \frac{\overline{AD} \times \overline{AB}}{\overline{AB}+\overline{DB}}.$$

$$\overline{AH} = \frac{\frac{4(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1+\frac{4\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{5}+1}} = \frac{4(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)+4\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{4(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{4\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}.$$

Deci :

$$\overline{BH}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AB}^2 = \frac{(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{5}-1)^2}{\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2} + (\sqrt{5}-1)^2$$

$$= (\sqrt{5}-1)^2\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^2+\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2}{\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)^2(3+2\sqrt{2}+1+4+2\sqrt{2}+2\sqrt{4+2\sqrt{2}})}{\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)^2(8+4\sqrt{2}+2\sqrt{4+2\sqrt{2}})}{\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\overline{BH} = \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{8+4\sqrt{2}+2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}.$$

Deci :

$$\overline{BE} = \frac{\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{8+4\sqrt{2}+2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \times \frac{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}\sqrt{8+4\sqrt{2}+2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{(\sqrt{5}+1)\left[1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right]}$$

$$= \frac{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}\sqrt{2(4+2\sqrt{2})+2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{(\sqrt{5}+1)\left[1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right]}.$$

Să notăm

$$\sqrt{4+2\sqrt{2}} = a.$$

Avem:

$$\overline{BE} = \frac{2a\sqrt{2a^2+2a}}{(\sqrt{5}+1)[1+a]} = \frac{2a\sqrt{2a}\sqrt{1+a}}{(\sqrt{5}+1)(1+a)} = \frac{2a\sqrt{2a}}{(\sqrt{5}+1)\sqrt{1+a}}.$$

C. I. B.

IV. 462. Observăm că punând

$x^2+y^2 = A$; $x^2-y^2 = B$; $u^2+v^2 = A'$; $u^2-v^2 = B'$

avem:

$$E \equiv [A^3B'^3 + B^3A'^3]^2 - [B^3B'^3 + A^3A'^3]^2$$
$$= A^6B'^6 + B^6A'^6 - B^6B'^6 - A^6A'^6 = B'^6[A^6 - B^6] - A'^6[A^6 - B^6]$$
$$= [A^6 - B^6][B'^6 - A'^6] = (A^3+B^3)(A^3-B^3)(B'^3+A'^3)(B'^3-A'^3)$$

dar:

$$A^3 + B^3 = (x^2+y^2)^3 + (x^2-y^2)^3 = 2x^6 + 6x^2y^4 = 2x^2(x^4+3y^4)$$
$$A^3 - B^3 = (x^2+y^2)^3 - (x^2-y^2)^3 = 6x^4y^2 + 2y^6 = 2y^2(3x^4+y^4)$$
$$A'^3 + B'^3 = (u^2+v^2)^3 + (u^2-v^2)^3 = 2u^2(u^4+3v^4)$$
$$B'^3 - A'^3 = (u^2-v^2)^3 - (u^2+v^2)^3 = -2v^2[3u^4+v^4]$$
$$\therefore \quad E \equiv -2^4x^2y^2u^2v^2(x^4+3y^4)(3x^4+y^4)(u^4+3v^4)(3u^4+v^4)$$

deci E este totdeauna negativ.

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 505. Se dau două cercuri* O_1 *și* O_2. *Să se înscrie între aceste două cercuri un segment* A_1A_2 *de lungime dată* l *și făcând cu linia centrelor un unghiu dat* α. *Discuție.*

V. GH.

Fie R și r respectiv razele cercurilor O_1 și O_2; $\overline{O_1O_2} = d$. Segmentele $\overline{A_1A_2}$, de lungime l, făcând cu O_1O_2 unghiul α și având extremitățile A_2 pe cercul O_2, au extremitățile A_1 pe cercul O_2', obținut dând lui O_2 o mișcare de translație către O_2, de direcție și de modul date. Intersecția lui O_2' cu O_1 ne dă în general două

extremități, A_1 și A_1'. Rezultă segmentele $\overline{A_1A_2}$ și $\overline{A_1'A_2'}$. Luând și simetricele acestora față cu O_1O_2 avem în total patru soluții. Dacă cercurile O_2' și O_1 sunt tangente, numărul soluțiilor este de două; dacă aceste cercuri sunt exterioare, avem zero soluții. Fie λ a treia latură a triunghiului ale cărui două laturi sunt l și $\overline{O_1O_2}$, iar unghiul cuprins între acestea α. Construcția este posibilă dacă $\lambda \leqslant R + r$.

V. 532. După identitatea împărțirii trebue să avem:

$$P(x) \equiv (x^2 + x + 5)(x^3 + ax^2 + bx + c) + 3x + 2$$

și condițiile:

$$P(1) = 7(1 + a + b + c) + 5 = 5$$

$$\therefore \quad (1) \qquad a + b + c = -1$$

$$P(-2) = 7(-8 + 4a - 2b + c) - 6 + 2 = -4$$

$$\therefore \quad (2) \qquad 4a - 2b + c = 8$$

$$P(-3) = 11(-27 + 9a - 3b + c) - 9 + 2 = 4$$

$$\therefore \quad (3) \qquad 9a - 3b + c = 28.$$

Rezolvând sistemul format de (1), (2) și (3) găsim

$$a = 4 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad c = -6.$$

Polinomul este:

$$P(x) \equiv x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 2x - 28.$$

G. D. S.

V. 541. Punând $x + y + z = S$, avem $y + z - x = S - 2x$;

$$z + x - y = S - 2y \quad , \quad x + y - z = S - 2z,$$

iar expresiunea devine:

$$E \equiv \frac{1}{2} \sum (S - 2x)[[(S - 2y) - (S - 2z)]^2 + \lambda (S - 2x)^2] \qquad (2)$$

termenii sumei obținându-se făcând permutări circulare asupra lui x, y, z. Dar forma (2) a expresiunii E conduce la substituirea:

$$S - 2x = u \quad , \quad S - 2y = v \quad , \quad S - 2z = w$$

și ca urmare expresiunea ia forma mai simplă următoare:

$$E \equiv \frac{1}{2} \sum u(v - w)^3 + \frac{\lambda}{2} \sum u^3 (v - w).$$

Se va observa apoi că fiecare din aceste două sume este omogenă şi de gradul al patrulea şi de altă parte divizibilă cu produsul $(u - v)\ (v - w)\ (w - v)$ care dă un polinom omogen şi de gradul al treilea. Se va determina apoi câtul de gradul întâi prin metoada coeficienţilor nedeterminaţi. (Vezi de ex. *Culegerea de Probleme de Algebră* de Prof. A. G. IOACHIMESCU. Partea I, ed. IV, 1938, *Biblioteca Gazetei Matematice*).

O. N. Ţ.

V. 542. Se observă că expresiunea poate fi pusă imediat sub forma:

$$E \equiv \Sigma a(b-c)^5 + \lambda^2 \Sigma a^3 (b-c)^3 + \lambda^4 \Sigma a^5 (b-c).$$

Considerând prima sumă $E_1 \equiv \Sigma a(b-c)^5$ observăm că ea fiind divizibilă cu $(a-b)$, cu $(b-c)$, cu $(c-a)$, este divizibilă cu produsul $(a-b)(b-c)(c-a)$ care este polinom omogen de gradul al treilea, deci câtul este deasemenea omogen şi de gradul al treilea. Cum câtul nu se schimbă când schimbăm două litere între ele, urmează că el este de forma:

$$k_1 \Sigma a^3 + k_2 \Sigma a^2 b + k_3 abc.$$

Făcând pe $c = 0$ se deduce prin identificarea celor doi membri:

$$k_2 = k_1 = 1.$$

Făcând apoi în egalitatea obţinută:

$$a = 3 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = 1$$

se determină k_3. In acelaşi fel se procedează pentru sumele

$$E_2 \equiv \Sigma a^3 (b-c)^3 \quad \text{şi} \quad E_3 \equiv \Sigma a^5 (b-c); \text{ etc.}$$

(Vezi *Culegerea de Probleme de Algebră* de Prof. A. G. IOACHIMESCU. Ed. IV, p. I, 1938, din *Biblioteca Gazetei Matematice*).

O. N. Ţ.

V. 543. In primul rând expresiunea poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{aligned} E(x) \equiv{}& m[x^{pm-1} + x + 1][x^{pn-} + x + 1 - 3] \\ & - n[x^{pn-1} + x + 1][x^{pm-1} + x + 1 - 3] \\ \equiv{}& (x-1)[m[x^{pm-1} + x + 1][x^{pn-2} + x^{pn-3} + \ldots + x + 1 + 1] \\ & - n[x^{pn-1} + x + 1][x^{pm-2} + x^{pm-3} + \ldots + x + 1 + 1]] \end{aligned}$$

sau încă:

$$\frac{E(x)}{x-1} \equiv m[x^{pm-1}+x+1][x^{pn-2}+x^{pn-3}+\ldots+x+2]$$

$$-mpn[x^{pm-1}+x+1]+mnp[x^{pm-1}+x+1]$$

$$-n[x^{pn-1}+x+1][x^{pm-2}+x^{pm-3}+\ldots+x+2]$$

$$+npm[x^{pn-1}+x+1]-mnp[x^{pn-1}+x+1]$$

$\therefore$

$$\frac{E(x)}{(x-1)^2} \equiv m[x^{pm-1}+x+1]\left[\frac{x^{pn-2}-1}{x-1}+\frac{x^{pn-3}-1}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}+1\right]$$

$$-n[x^{pn-1}+x+1]\left[\frac{x^{pm-2}-1}{x-1}+\frac{x^{pm-3}-1}{x-1}+\ldots+\frac{x^2-1}{x-1}+1\right]$$

$$+mnp\left[\frac{x^{pm-1}-x^{pn-1}}{x-1}\right].$$

Exercițiul poate fi generalizat.

O. N. Ț.

Clasa VI-a. *Exerc. 496. Se consideră o foaie de hârtie dreptunghiulară de dimensiuni* a, b. *Această foaie se înfăşură după diverşi cilindri, astfel încât două vârfuri opuse ale dreptunghiului să cadă fiecare pe câte unul din cercurile de bază ale cilindrului, iar celelalte două vârfuri să cadă pe aceeaşi generatoare. Se cere expresia suprafeţei laterale a acestor cilindri, precum şi valorile, cea mai mare şi cea mai mică, pe care le poate avea această suprafaţă.*

V. Gh.

Fie ABCD (BC = DA = a, AB = CD = b) dreptunghiul dat. Prin A şi C ducem paralele care să nu taie dreptunghiul, iar prin B şi D câte o perpendiculară pe aceste paralele. Se obţine dreptunghiul circumscris primului, MNPQ şi care reprezintă suprafaţa laterală a unuia din cilindri.

Fie $\sphericalangle DAM = \alpha$. Vom avea:

$$MA = a\cos\alpha$$

$$NA = b\sin\alpha$$

$$NB = b\cos\alpha$$

$$BP = a\sin\alpha$$

$$\text{Sup. } MNPQ = (MA+AN)(NB+BP) = (a\cos\alpha + b\sin\alpha)(b\cos\alpha + a\sin\alpha)$$

$$= ab\cos^2\alpha + b^2\sin\alpha\cos\alpha + a^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin^2\alpha =$$

$$= ab + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\sin 2\alpha$$

Sup. MNPQ este cea mai mare când $\sin 2\alpha = 1$, $\alpha = 45^0$
» » » » » mică » $\sin 2\alpha = 0$, $\alpha = 0^0$.

VI. 521. Trecem alt radical în partea a doua şi ridicăm la cub. Avem:

$$(1) \quad 4(x+1)\sqrt{x^2+1} = \sqrt{6(x-1)^4} = \sqrt{6}(x-1)^2.$$

Ridicăm la patrat şi făcând toate reducerile obţinem ecuaţia reciprocă:

$$5x^4 + 28x^3 - 2x^2 + 28x + 5 = 0.$$

Impărţind cu x^2 şi punând $y = x + \frac{1}{x}$ avem:

$$5y^2 + 28y - 12 = 0$$

$$y = \frac{-14 \pm \sqrt{256}}{5} = \frac{-14 \pm 16}{5} \qquad y_1 = \frac{2}{5}\ ;\ y_2 = -6.$$

Ecuaţia $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{5}$ dă rădăcini imaginare.

Ecuaţia $x + \frac{1}{x} = -6$ dă $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

Convine numai rădăcina $x = -3 + 2\sqrt{2}$.
Cealaltă dă prima parte negativă şi a doua pozitivă.

G. D. S.

VI. 524. Intr'adevăr, datorită relaţiei unghiulare, patrulaterul CMON este inscriptibil şi raza sa R este dată de

$$2R = \frac{\overline{OC}}{\sin ONC}$$

adică o constantă, căci $\sphericalangle ONC$ este constant deoarece direcţiile ON şi NC sunt fixe.

Avem însă

$$2R = \frac{\overline{NM}}{\sin NCM}$$

şi deci

$$\overline{NM} = 2R \sin NCM$$

dar cum

$$\sin NCM = \sin AOB$$

rezultă

$$\overline{NM} = 2R \sin AOB$$

şi proprietatea e demonstrată.

G. G. C.

VI. 532. Observăm că

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5}+1 \quad \text{şi} \quad \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1;$$

apoi

$$\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{8+2(\sqrt{5}-1)} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5}+1$$

$$\sqrt{13-4(\sqrt{5}+1)} = \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2$$

$$\sqrt{26+6(\sqrt{5}-2)} = \sqrt{14+6\sqrt{5}} = +3+\sqrt{5}; \text{ etc. } N = +6.$$

O. N. Ţ.

VI. 533. Se observă succesiv că:

$$2a^2-1+2a\sqrt{a^2-1} = (a+\sqrt{a^2-1})^2$$

$$(a^2-1)+4a(a+\sqrt{a^2-1}) = 5a^2-1+4a\sqrt{a^2-1} = (2a+\sqrt{a^2-1})^2$$

$$-(2a^2+1)+6a(2a+\sqrt{a^2-1}) = -2a^2-1+12a^2$$

$$+6a\sqrt{a^2-1} = 10a^2-1+6a\sqrt{a^2-1} = (3a+\sqrt{a^2-1})^2$$

şi aşa mai departe, avem pentru ultima cantitate din care se extrage rădăcina patrată:

$$-[(n-1)^2-2]a^2-1+2na[(n-1)a+\sqrt{a^2-1}]=-(n-1)^2\times$$
$$a^2+2a^2-1+2n^2a^2-2na^2+2na\sqrt{a^2-1}=(n^2+1)a^2-1+$$
$$+2na\sqrt{a^2-1}=[na+\sqrt{a^2-1}]^2.$$

Deci valoarea primei expresiuni este:

$$[na+\sqrt{a^2-1}].$$

In acelaş fel procedând pentru a doua expresiune găsim că valoarea ei este:

$$[na+(-1)^n\sqrt{a^2-1}].$$

Aşadar, dacă n este un număr *par* diferenţa (E_1-E_2) este un număr raţional (zero); dacă n este un număr impar suma (E_1+E_2) este un număr întreg, deci raţional.

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 411. Să se studieze variaţiunea funcţiunei*

$$y=2a+x\sqrt{2}+\sqrt{\frac{x^2-4ax+3a^2}{2}}$$

când x *variază între* —a *şi* +a.

GH. B.

Notez cu

$$z=x^2-4ax+3a^2$$

şi observ că z se anulează pentru

$$x_1=a \quad \text{şi} \quad x_2=3a.$$

Deci pentru

$$a<x<3a \ , \ z<0, \ \text{iar} \ y = \text{imaginar}$$

rezultă că pentru

$$-a<x<a \ , \ 0<z \ \text{şi} \ y \ \text{real}.$$

Pentru valorile $-a$, 0, $+a$ se găseşte că y ia valorile

$$a\times 2{,}59\ldots \ , \ a\times 3{,}29\ldots \ , \ a\times 3{,}41\ldots$$

Calculând derivata lui y găsim

$$y'=\sqrt{2}+\frac{x-2a}{\sqrt{2}\sqrt{x^2-4ax+3a^2}}$$

care se anulează pentru

$$x_3 = a \times 3{,}15\ldots \text{ în afara intervalului } (-a, +a)$$

și pentru

$$x_4 = a \times 0{,}85\ldots$$

Făcând în y' pe x succesiv egal cu $-a$, 0, $+a$ se găsește că y' are respectiv semnul $+$, $+$, ...

Cu aceste valori se construește următorul tabel al variației lui y:

x	$-a$		0		$0{,}85\,a$		a
y'	$+$		$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	$2{,}59 \times a$	↗	$3{,}29 \times a$	↗	$3{,}59 \times a$	↘	$3{,}41 \times a$

y crește dela valoarea $2{,}59 \times a$, atinge un maxim egal cu $3{,}59 \times a$ și apoi descrește până la $3{,}41 \times a$.

Dintre cei 3 rezolvitori ai acestui exercițiu D-l T. I. NICOARĂ (Lic. «Unirea», Focșani) a dat o soluție complectă și exactă construind și curba reprezentativă foarte exactă la scară. D-l T. I. NICOARĂ a studiat și derivata a doua a lui y, ceea ce nu este neapărat necesar.

VII. 447. In identitatea:

$$x^3 + y^3 \equiv (x+y)^3 - 3xy\,(x+y)$$

facem:

$$x = C_{m-1}^{n} \quad \text{și} \quad y = C_{m-1}^{n-1}.$$

Ținând seama de relația

$$C_{m-1}^{n} + C_{m-1}^{n-1} = C_m^n$$

avem:

$$(C_{m-1}^{n})^3 + (C_{m-1}^{n-1})^3 = (C_m^n)^3 - 3\,C_{m-1}^{n}\,C_{m-1}^{n-1}\,C_m^n$$

$$= (C_m^n)^3 - 3\,\frac{n(m-n)}{m^2}\,(C_m^n)^3 = \frac{m^2 - 3mn + 3n^2}{m^2}\,(C_m^n)^3$$

q. e. d.

G. D. S.

VII. 451. Să se arate că:

$$\sum_{n=1}^{n}\sum_{n=1}^{n}\sum_{n=1}^{n} n = \frac{n^2}{24}(n^2+11)+\frac{n}{4}(n^2+1).$$

C. I. Ț.

Avem succesiv:

$$\sum_{1}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n} n = \sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\Sigma n^2+\frac{1}{2}\Sigma n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4} = \frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{n}\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n} n = \sum_{n=1}^{n}\left(\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}\right) =$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{2n^3+3n^2+n}{12}+\frac{n(n+1)}{6} =$$

$$\frac{n^2}{24}(n^2+11)+\frac{n}{4}(n^2+1).$$

Generalizarea.

$$\sum_{n=1}^{n}\sum_{n=1}^{n}\sum_{n=1}^{n}\cdots\sum_{n=1}^{n} = C_{n+p}^{p+1},$$

în total fiind p sume (Σ).

VII. 457. Problema conduce la sistemul de ecuații:

$$\left|\begin{array}{l} x+y+z=l\ ;\quad x\sin\alpha+y\cos(45^0+\alpha)+z\cos\alpha=m; \\ \qquad -x\cos\alpha-y\cos(45^0+\alpha)+z\sin\alpha=n \end{array}\right. \tag{1}$$

sau:

$$\left|\begin{array}{l} x-y+z=l\ ;\quad x\sin\alpha-y\cos(45^0+\alpha)+z\cos\alpha=m \\ \qquad -x\cos\alpha+y\cos(45^0+\alpha)+z\sin\alpha=n. \end{array}\right. \tag{2}$$

Pentru primul sistem determinantul sistemului are valoarea:

$$\Delta_1 = -1+2\cos\alpha\cos(45^0+\alpha).$$

Valorile lui $\alpha < \frac{\pi}{2}$ care anulează pe Δ_1 sunt soluții ale ecuației

$$\cos 2\alpha-\sin 2\alpha = \sqrt{2}-1,$$

sau încă:

$$\cos(2\alpha+45^0) = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cum $0 < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, există o valoare α_0 a lui α, astfel ca $0 < \alpha_0 < 90$, care satisface ecuația; deci $2\alpha + 45^0 = \alpha_0$ $\therefore$ $\alpha = \frac{\alpha_0}{2} - \frac{45^0}{2}$ cuprinsă între 0 și $\frac{\pi}{4}$ care anulează numitorul; etc.

O. N. Ț.

Clasa VIII-a. *Exerc. 339. Să se studieze variația funcției:*

$$y = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}\sin x}{1 - \sqrt{2}\sin x}}$$

și să se reprezinte această variație.

O. N. Ț.

Schiță de soluție: Funcția este periodică de perioadă 2π, este de ajuns a fi studiată într'un singur interval de lungimea 2π; cum ea are o discontinuitate infinită, acest interval poate fi luat:

$$\left(\frac{\pi}{4} \ , \ 2\pi + \frac{\pi}{4}\right).$$

Funcția se anulează în intervalul ales pentru

$$x = \pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{și} \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Derivata întâia a funcției y este dată de:

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1 + \sqrt{2}\sin x}{1 - \sqrt{2}\sin x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos x}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x\right)^2},$$

ea are deci în intervalul de existență (de realitate) semnul lui $\cos x$. Dar în intervalul considerat domeniul de existență este în intervalele

$$\left(\frac{3\pi}{4} \ , \ \pi + \frac{\pi}{4}\right) \text{ și } \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \ , \ 2\pi + \frac{\pi}{4}\right).$$

In nici unul din aceste intervale $\cos x$ nu se anulează și este negativ în $\left(\frac{3\pi}{4} \ , \ \pi + \frac{\pi}{4}\right)$ și pozitiv în al doilea $\left(2\pi - \frac{\pi}{4}, \ 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, deci funcția în primul interval descrește continuu dela $+\infty$ la 0; iar în al doilea crește continuu dela 0 la $+\infty$; tangentele la capetele intervalului la curba reprezentativă fiind paralele la axa OY. Derivata a doua se anulează în fiecare din cele două intervale.

Până la 5 Decemvrie s'au primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numărul 1, 2 și 3 anul VI, dela[1]):

Școala Centrală de fete București.

Clasa IV-a: Cățafani Andreia (IV: 461), Dumitrescu Alexandra (IV: 450, 7, 61, 5*, 6, T. c.: 236), Duță Silvia (IV: 460, T. c.: 249), Jitariu Florica (IV: 452, 3, T. c.: 236), Motaș Rodica (IV: 460), Teodorescu C. Maria (IV: 452* 3, 7, 8*, 61*, 5*).

Clasa VI-a: Toni C. Ortansa (VI: 527*, 40).

Clasa VII-a: Azimioară Șt. Fifi (VII: 446), Gaster C. A. (VII: 453).

Liceul „Carmen-Sylva" București.

Clasa IV-a: Cristea Lambrina (IV: 452, 7), Damian C. Lucia (IV: 457, 65*).

Clasa VI-a: Vasilescu O. Alexandrina (538, 40).

Clasa VII-a: Crașoreanu Lucia (VII: 447, 55), Georgescu Diana (VII: 452, 3), Haralamb Elena (VII: 447, 53), Ionescu Margareta (VII: 452), Vasilescu Petra (VII: 447, 52, 3).

Clasa VIII-a: Buzescu G. Claudia (VIII: 337), Niculescu C. Paula (VIII: 334, 7, 8*), Nissim L. Mioara (VIII: 334, 7, 8*).

Liceul „Iulia Hajdău" București.

Clasa VI-a: Iorga Aneta (VI: 521, 5, 6, 7, T. c.: 236), Stoia N. Silvia (VI: 521, 5, 6, 7, T. c.: 236).

Liceul „Regina Maria" București.

Clasa V-a: Iliescu Gh. Viorica (V: 537*).

Liceul „Aurel Vlaicu" București.

Clasa IV-a: Dan Maria (IV: 452, 3).

Liceul „Domnița Ileana" București.

Clasa IV-a: Plachide Mioara (IV: 452*, 3, 7*, 65).

Liceul „Pompilian" București.

Clasa VII-a: Nicolescu Violeta (VII: 448, 52).

Liceul „Iulia Hajdău" Câmpina.

Clasa VI-a: Jacomin Sanda (T. c.: 236, 7).

Liceul „Oltea Doamna" Iași.

Clasa VI-a: Glantzstein Rodica (VI: 527).

Liceul „Notre Dame de Sion" Iași.

Clasa VI-a: Copal I. Sofia (VI: 521, 7).

Liceul de fete Râmnicu-Vâlcea.

Clasa VII-a: Jurcan C. Sofia (VII: 451*, 3, 6*, T. c.: 236, 7, 43).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Liceul „Carmen-Sylva" Timişoara.

Clasa IV-a: Cloaşe Constanţa (IV: 460), Mincă F. Elena (IV: 457, 60), Roşu Gh. Glicheria (IV: 460).

Clasa VI-a: Bacony C. Maria (VI: 521, 7).

Clasa VII-a: Gall E. Lili (VII: 447, 53), Ionescu I. Lucia (VII: 453), Leibovacs Ana (VII: 447, 8, 53), Severineanu C. Maria (VII: 453).

Clasa VIII-a: Checian N. Ana (VIII: 338*, 51*, T. c.: 235, 43, 4, 5), Domonkos O. Erika (VIII: 335, 8, 46, 51), Mang Ileana (T. c.: 243, 4, 5).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa VI-a: Elias F. P. (VI: 521, 34, 8, T. c.: 236, 7, 44, 5), Krauss R. (VII: 447, 50).

Clasa VII-a: Fundăţeanu M. (VII: 446, 53, 69*), Iorgulescu A. F. (VII: 451*, 2), Nicolau Gh. C. (T. c.: 236*), Teodorof A. I. (VII: 447, 53, 5).

Clasa VIII-a: Teodorof Şt. (VIII: 335, 40*, 1).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa III-a: Ieşean Al. (III: 95, 100).

Clasa IV-a: Alexandrescu C. I. (IV: 460, 1, 5*), Antonescu D. E. (IV: 453, 60, 5*, 6, T. c.: 237, 49, 50, 3), Ardelean V. C. (IV: 465*), Grigorescu P. R. (IV: 452), Lazăr Şt. (IV: 461, 6), Podoleanu S. E. (IV: 452, 60, 1*, 5*), Poplien S. S. (IV: 452, 60), Ştefan G. L. (IV: 460, 5*), Stoenescu A. Gh. (IV: 453, 60, 5*).

Clasa V-a: Alexandrescu C. (V: 537), Benjamin S. (V: 532), Covrigeanu A. R. (V: 544), Ghelber G. A. (V: 544), Marcovici I. (V: 537, T. c.: 235), Negrescu S. (V: 537), Saiovici E. (V: 532, 5, 8*, 44), Sternberg A. E. (V: 532), Tudori C. E. (V: 537).

Clasa VI-a: Bălan T. C. (VI: 521, 7).

Clasa VII-a: Vasiliev A. B. (VII: 452, T. c.: 235, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa V-a: Teodorescu T. A. (V: 545, 51, 2, 3, 4).

Clasa VII-a: Andreescu L. M. (VII: 456*), Blank H. E. (VII: 448), Mişu St. Al. (VII: 456*).

Clasa VIII-a: Grigoriu A. D. (VIII: 337*, 8*, 44), Guralivu Şt. E. (VIII: 334, 5, 6, 40, 4), Nicolescu I. P. (VIII: 336), Racoviceanu G. I. (VIII: 334), Şeibulescu C. (VIII: 334, 40, 4).

Liceul „M. Eminescu" Bucureşti.

Clasa V-a: Aron I. Gh. (V: 521, 3, 6, 36, 7, 8, VII: 446, 50, 2, 3, T. c.: 237, 8, 40, 9).

Clasa VIII-a: Costescu Gh. I. (VIII: 337*, 8*), Leibovici S. (VIII: 341, T. c.: 237, 40, 1, 6, 9, 51), Saiovici T. T. (VIII: 337, 8).

Institutul „Schewitz Thierrin" Bucureşti.

Clasa VI-a: Folea C. M. (VI: 522), Păsărica I. I. (VI: 521, 5, 6).

Clasa VII-a: Mărgărit I. N. (VII: 446, 8, 50*, 2, 3, 5, 6*, T. c.: 235, 6, 7).

Liceul „T. Maiorescu“ București.

Clasa VII-a: Niculescu C. M. (VII: 455, VIII: 333*, T. c.: 241).

Clasa VIII-a: Profeta S. A. (VIII: 335, 6, 7).

Liceul „Mihaiu Viteazul“ București.

Clasa VII-a: Marcus B. (VII: 453. T. c.: 236, 7, 40, 1, 3, 4, 5, 6), Ștefănescu S. D. (VIII: 446, 8, 9, 50, 1*, 2, 3*, 5).

Clasa VIII-a: Brezeanu C. (VIII: 334, 5).

Colegiul Național „Sf. Sava“ București.

Clasa IV-a: Antonescu N. M. (IV: 453), Dimos H. F. (IV: 454, 6, 9, 63*, 4*, 5, 6), Dumitrescu F. D. (IV: 452, 3, 4*), Ionescu D. (T. c.: 236*), Mișicu V. M. (IV: 452, 3, 4*, 5*, 7, 8, 60, 1*, 3, 4, 5*, 6, 7), Nicolau Gh. Gh. (IV: 452, 3, 4*, 60, 1), Simion S. (IV: 453*).

Clasa V-a: Stoika V. V. (V: 546).

Clasa VI-a: Botea V. V. (VI: 527).

Clasa VII-a: Ciurescu I. F. (VII: 466, T. c.: 236), Ghițescu M. (T. c.: 236, 51), Paternelli S. P. (VII: 448, 53, 5).

Liceul „Sft. Andrei“ București.

Clasa VI-a: Ganea V. Marin (VI: 525, 7*).

Clasa VII-a: Constantinescu V. D. (VII: 452, 3*, 5), Șenki M. E. (VII: 453, T. c.: 235, 6, 7, 49, 50, 1), Ștefanovici I. M. (VII: 456*, 9, 64*, 6, T. c.: 235, 7, 44*, 5, 6, 51*, 3), Voiculescu I. N. C. (VII: 459*, 62, 6, T. c.: 251).

Liceul „Sf. Iosif“ București.

Clasa VII-a: Vasilescu P. I. (VII: 446, 7, 8, 52, 66).

Liceul „Aurel Vlaicu“ București.

Clasa VI-a: Mănescu G. I. (VI: 523, 5, 6, 7*).

Liceul „Sf. Gheorghe“ București.

Clasa VI-a: Andonie Șt. I. (VI: 531, 4, 8, 9, 40, T. c.: 235, 6, 7, 8, 40, 9).

Liceul „Profesorii Asociați“ București.

Clasa VII-a: Marcussohn O. (T. c.: 240, 1, 3).

Liceul „Moise Nicoară“ Arad.

Clasa V-a: Grozescu T. P. (V: 536), Nistor I. I. (537, 46, VI: 527), Popa Th. (V: 538*).

Clasa VI-a: Fleissig L. (VI: 523).

Liceul „Regele Ferdinand I“ Bacău.

Clasa VII-a: Șalec P. M. (VII: 448, 55, 66).

Liceul „Codreanu“ Bârlad.

Clasa VII-a. Atanasiu A. A. (VII: 447), Segal H. A. (VII: 448, 52).

Liceul „Sft. Vasile“ Blaj.

Clasa IV-a: Balea I. I. (IV: 457, 8, 65*), Cârnațiu I. I. (IV: 465*).

Clasa VIII-a: Cristea I. N. (VIII: 337, T. c.: 240*, 1*).

Liceul „Tr. Laurian“ Botoșani.

Clasa VI-a: Cotter S. M. (VI: 540), Toma G. G. (VI: 525, 7).

Clasa VII-a: Munteanu N. F. (VII: 453, 5, T. c.: 235, 6, 7, 43).

Liceul „N. Bălcescu" Brăila.

Clasa VI-a: Udrea A. Șt. (VI: 527, 38, 40, T. c.: 235, 49, 51).

Clasa VII-a: Chirculescu M. I. (VII: 446, 7, 8, 50*, 1*, 2, 5), Cotariu D. M. (VII: 446, 7, 8, 9, 50*, 1*, 2, 3, 5, 60, T. c.: 234, 5*, 6*, 7, 40, 1*, 3, 4, 5), Faniaru L. I. (VII: 446, 54, T. c.: 240, 1, 3, 4, 5).

Clasa VIII-a: Trefilov I. M. (VIII: 335*, 6, 7*, 8*, 51*, T. c.: 236, 7, 49, 51).

Liceul „Dr. I. Meșotă" Brașov.

Clasa IV-a: Ilie D. I. (IV: 454, 65), Măsariu V. V. (IV: 452), Ouatu S. I. (IV: 465), Pantelimonescu C. (IV: 465), Trandafirescu I. T. (IV: 460, 5),

Clasa V-a: Florică St. (V: 537, 44).

Clasa VII-a: Stere C. I.: (VII: 449).

Clasa VIII-a: Băncilă I. A. (VIII: 333, 4, 5, 6, 8*), Rosenzweig I. M. (VIII: 335, 6, 46).

Liceul „Andrei Șaguna" Brașov.

Clasa VI-a: Netcu Șt. A. (VI: 527*, 40), (VII: 452, T. c.: 236).

Clasa VII-a: Badea A. I. (VII: 447, 53, T. c.: 240, 3).

Liceul Internat „Buftea".

Clasa IV-a: Alecsandri S. A. (IV: 457, 8, 60), Burghele V. (IV: 457, 8), Tănăsescu M. (IV: 457).

Clasa VI-a: Bănică G. (VI: 526, 40), Costică M. (VI: 526, 40), Șalapa V. (VI: 526, 40).

Clasa VIII-a: Cernescu Gh. (VIII: 335, 6, 8*, 41), Constantinescu Al. (VIII: 335).

Liceul „B. P. Hajdeu" Buzău.

Clasa VII-a: Aldea V. M. (VII: 446*, 7, 9, 51*, 2, 3, 5, 64*, VIII: 337*, 46, T. c.: 236, 7, 40, 1, 4, 5, 8*, 9, 51, 3*).

Liceul „Știrbey Vodă" Călărași.

Clasa VII-a: Bordușanu V. P. (VII: 453, 5, T. c.: 236, 40, 5, 6, VII: 449), Iancu I. G. (T. c.: 236, 43), Ionescu H. V. (T. c.: 236), Mateescu L. (T. c.: 236, 43), Mihalcu M. (T. c.: 243), Niculescu C. N. (T. c.: 243), Petrescu P. (T. c.: 236, 43), Rădulescu V. M. (VII: 448, 54, 5, T. c.: 235, 6, 7, 43, 4, 5),

Liceul militar „Ștefan cel Mare" Cernăuți.

Clasa IV-a: Cortușan C. I. (IV: 460, T. c.: 241); Nicolaescu I. (IV: 460, 5, V: 546), Rang A. C. (IV: 460), Staicu I. C. (IV: 460, 5, V: 536, 9, T. c.: 236, 40, 1, 3, 9, 51), Țicu C. C. (IV: 460), Vasiliu D. (IV: 460, 5, T. c.: 241, 51, 3).

Clasa V-a: Catrinescu V. N. (V: 537), Ismană G. M. (V: 537), Niculescu C. C. (V: 537), Polexiu I. T. (V: 537).

Clasa VI-a: Ivan D. H. (VI: 527), Irimescu S. P. (VI: 521, 7), Topârceanu I. G. (VI: 521, 7).

Clasa VIII-a: Cârdeiu D. G. (VIII: 341), Dovgan V. G. (VIII: 341), Mocanu I. C. (VIII: 335, 6, 7*, 8*, T. c.: 240, 1, 3), Moisii G. I. (VIII: 341),

Liceul „Mitropolitul Silvestru" Cernăuți.

Clasa V-a: Volschi L. A. (V: 537, 44).

Liceul militar „Regele Ferdinand I" Chişinău.

Clasa V-a: Voicu G. (V: 527, 38, VI: 527, VII: 452).

Clasa VI-a: Boancă G. A. (T. c.: 236), Cristea C. (VI: 527, 32, 4, 6, T. c.: 243, 4, 5), Gerău V. (VI: 534), Harea F. V. (VI: 523, 7, T. c.: 236. 7, 45), Ilasie V. (VI: 534), Moise C. I. (VI: 527, 34, 6, 7), Pacioglu C. C. (VI: 523, 36, 7), Romanovschi V. (VI: 523, 7, 34, 6), Tararău V. (VI: 527), Vulpe N. (VI: 523, T. c.: 236, 7).

Clasa VII-a: Cernat I. (VII: 453), Ilie N. (VII: 447, 53, T. c.: 236, 7), Ionescu M. C. (VII: 447, 53, T. c.: 236, 7). Jalbă L. (VII: 453, T. c.: 236), Vesa R. (VII: 453, T. c.: 236, 7).

Clasa VIII-a: Petcu I. V. (VIII: 333*), Popescu C. I. (VIII: 333, 4, 5), Todirică V. C. (VIII: 335), Toma I. V. (VIII: 335), Vlăsceanu I. V. (VIII: 335), Zancu A. (VIII: 335, 8*).

Liceul „Gh. Barițiu" Cluj.

Clasa IV-a: Damilescu J. E. (IV: 452, 3).

Clasa VI-a: Cap de bou F. F. (VI: 531, 6, 8, VII: 449), Guțu H. V. (VI: 521), Salvan V. V. (VI: 521, 5, 7, VII: 450, T. c.: 236, 43).

Clasa VII-a: Bărbosu A. O. (VII: 453).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanța.

Clasa VI-a: Sotiriu N. T. (VI: 527, 31, 4).

Liceul militar „D. A. Sturdza" Craiova.

Clasa V-a: Băldescu V. (V: 537, T. c.: 236), Bogdănescu N. (V: 537), Dascălu St. (V: 537), Dinculescu F. N. (V: 537), Ghinea M. (V: 537), Iacobescu I. (V: 537), Ionașcu F. (V: 537), Mareș A. E. (V: 537), Marincu D. I. (V: 536), Marinescu P. M. (V: 537), Mateescu A. M. (VI: 525), Movanu I. S. (VI: 525), Oprescu M. (V: 537), Popescu M. (V: 537), Procopie N. (V: 537), Ruja I. (V: 537), Vilaia G. (T. c.: 236).

Clasa VI-a: Bărbuneanu V. (VI: 521), Băcanu C. (VI: 521), Ceaușu V. (VI: 521, 7*), Cercel C. I. (VI: 521), Cioc I. M. (VI: 521, 6), Danielescu G. (VI: 521, 6, 7), Diaconu D. A. (VI: 521, 6, 7), Diaconu M. I. (VI: 521, 7), Dobrescu P. (VI: 521), Drăgan S. Z. (VI: 521, 6, 7), Heinrich C. (VI: 521, 7), Juscu St. S. (VI: 521, 7), Mărculescu N. I. (VI: 521, 7), Marinescu M. (VI: 521, 6), Mateescu B. C. (VI: 521, 7), Minciunescu D. (VI: 521, 6, 7), Morait R. (VI: 521, 6), Pașoiu N. D. VI: 521, 7), Popa E. (VI: 521, 7), Popescu D. V. (VI: 521, 6), Popescu G. (VI: 521, 7), Stănică G. (VI: 527), Teodorescu V. (VI: 521, 7), Tomescu S. (VI: 521, 7), Tuță S. (VI: 521, 6), Vlășceanu C. (VI: 521, 7), Zaharia S. (VI: 525, 7).

Clasa VII-a: Glogojeanu I. M. (VII: 446, 7, 8, 52*), Săndulache M. A. (VII: 448).

Clasa VIII-a: Bărbulescu G. (VIII: 337).

Liceul „Frații Buzești" Craiova.

Clasa IV-a: Marian M. D. (IV: 455).

Clasa VI-a: Ionescu S. T. (VI: 527, 8).

Liceul „Gr. Ghica Vodă" Dorohoi.

Clasa VII-a: Stoica I. A. (VII: 446, 7, 8, 59).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa VIII-a: Baruch M. (VIII: 333, 5, 6, 8, 46), Nicoară T. (VIII: 334, 40, 1*, 2, 6).

Liceul „V. Alecsandri" Galaţi.

Clasa VII-a: Abeles I. F. (VII: 448, 53, 5, 66, T. c.: 235*, 7, 43, 9*).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa IV-a: Marinescu I. (IV: 457).

Clasa VII-a: Ciupitu R. C. (VII: 448, 52, 3, 62, 6, T. c.: 237, 51), Petrescu R. G. (VII: 449, 51*, 4, 66, VIII: 335, T. c.: 244, 5).

Liceul Internat „C. Negruzzi" " Iaşi.

Clasa VI-a: Cerbeanu I. P. (T. c.: 235), Manolache C. T. (VI: 521, 7, 34, T. c.: 235, 6, 9, 40, 2, 3*, 4, 5), Manoliu V. (T. c.: 235, 6, 7, 8, 9, 40, 2, 3), Rabinschi M. N. (VI: 527, 38, T. c.: 249).

Clasa VII-a: Berechet S. M. (VII: 449, 51*, 3, 5, 6, T. c.: 243, 4, 5).

Liceul „Naţional" Iaşi.

Clasa VII-a: Anatolie F. (VII: 452, 3, T. c.: 234), Mattes L. (T. c.: 240), Rotman D. I. (T. c.: 243, 4, 5), Secu A. A. (VII: 446), Strochi S. A. (VII: 446, 8, T. c.: 235, 6, 7, 40, 3, 4, 5).

Liceul militar „G-ral Makarovici" Iaşi.

Clasa III-a: Bogza N. (III: 95), Bughiu C. (III: 93), Edu E. (III: 93), Popescu V. I. (III: 93), Şova M. (III: 93).

Clasa V-a: Marinescu M. I. (V: 537), Mateescu M. (V: 537), Milea C. C. (V: 531, 7, T. c.: 244, 5), Palade V. M. (V: 537), Puschin T. G. (V: 531, 7, T. c.: 244, 5).

Clasa VI-a: Bogdan G. G. (T. c.: 236, 7, 8, 40, 1, 2), Drăgănescu R. (T. c.: 236, 7), Drăghicescu P. P. (T. c.: 236, 7, 8, 40, 1, 2), Eliade V. (T. c.: (240, 1, 2, 3, 4, 5), Iacomi D. M. (T. c.: 237), Iliescu T. (T. c.: 236, 7), Ioan C. Z. (T. c.: 235, 7, 40, 1, 2), Mateescu I. M. (T. c.: 236, 7), Popa N. A. (VI: 527, 31, 4, T. c.: 235, 6, 7, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Clasa VII-a: Atanasiu C. V. (T. c.: 236, 7, 41), Broşteanu G. (VII: 448, T. c.: 237), Brotea G. (VII: 448, T. c.: 237), Gheorghiu A. A. (VII: 446, 51, 2, 5, T. c.: 237, 8, 41, 3, 4, 5, 6), Hagiac I. R. (VII: 455, T. c.: 241, 4, 5), Ioan D. A. (T. c.: 237), Şerbănescu M. (VII: 448).

Clasa VIII-a: Jiletcovici A. (T. c.: 240, 1, 2, 3, 4, 5), Pascaru I. C. (T. c.: 241, 2, 3, 4, 5), Rohr I. A. (VIII: 340, 6, T. c.: 240, 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Liceul militar „N. Filipescu" Mânăstirea Dealu.

Clasa V-a: Barbici I. (V: 537), Burş I. (V: 537), Cristescu C. (V: 537), Dumitrescu D. (V: 537), Gheorghiu A. M. (V: 533, 7), Iordănescu P. (V: 537), Nicolae C. A. (V: 533, 7), Nogacevschi I. (V: 536, 7, 9), Păunescu D. G. (V: 533), Petrescu I. S. (V: 533, 7, VII: 527), Săveanu I. (V: 537), Stoianovici Ş. (V: 537, 9, VI: 527, VII: 448, T. c.: 240, 1), Stroe Gh. (V: 537), Ţinculescu N. (V: 537, VI: 527, T. c.: 240, 1), Viecelli Al. (V: 537), Vitănescu C. (V: 533, VI: 536).

Clasa VI-a: Aldea V. V. (VI: 521, VII: 527, T. c.: 236), Dumitrescu O. C. (VI: 523).

Clasa VII-a: Andronescu T. (VII: 451*, 3), Bârlea Suhăţeanu G. V. (VII: 446, 53, 5), Chintescu M. (VII: 451*, 3), Cristescu V. (VII: 447, 51*, 3), Dragomir A. (VII: 451, 3, T. c.: 236, 7), Georgescu F. (VII: 451, 3, 5), Lăcătuş V. (VII: 448, 51), Mândrescu A. (VII: 453), Mastero L. (VII: 453, T. c.: 236), Popescu C. (VII: 453, T. c.: 236), Popescu L. (VII: 453), Predoiu N. (VII: 446, 53, 5, T. c.: 235), Răducanu L. (VI: 453), Şerban I. C. (VII: 446, 7, 9, 51, 3, 5, T. c.: 235, 6, 7, 40, 1, 3, 5), Vijelie E. (VII: 449, 53).

Clasa VIII-a: Stoenescu D. M. (VIII: 336, 7, 8, 40*, 1, 3, 5).

Gimnaziul Orşova

Clasa IV-a: Curcă I. (IV: 453).

Liceul „I. C. Brătianu" Piteşti.

Clasa V-a: Popescu G. M. (V: 531, 2, 5, 6, 7, 8, 44, VI: 521, 5, 7, 31, T. c.: 234, 6, 40, 1, 3, 4, 5).

Clasa VI-a: Bobe M. (VI: 521, 7, VII: 453).

Clasa VII-a: Tologea G. G. (VII: 446, 7, 8, 9, 50, 2, 3, 4).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel" Ploeşti.

Clasa IV-a: Constantinescu I. N. (IV: 452, 3), Evghenie C. C. (IV: 453, 5), Ghinea I. (IV: 452), Jupcianu N. N. (IV: 453, 60, T. c.: 237, 40).

Clasa V-a: Cătuneanu T. (V: 531, 6, 7), Moţoiu C. (V: 531, 6, 7), Weitzman I. (V: 521, 3, 7, 30, 1, 7, 44, 53, VI: 534, T. c., 237, 40, 1, 3, 4, 5).

Clasa VI-a: Bereanu M. B. (VI: 521, 3, 6, 7, 30, 1, T. c.: 236, 7, 40, 1, 2, 3), Pandelescu G. I. (VI: 538, 40, VIII: 336, T. c.: 236, 49).

Clasa VIII-a: Constantinescu V. (VIII: 335, 8*, T. c.: 236), Vasilescu N. G. (VIII: 337, 8*).

Liceul „Alex. Lahovary" Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VI-a: Andreescu G. I. (T. c.: 241, 3).

Liceul „Principele Nicolae" Sighişoara.

Clasa VII-a: Deac C. C. (VII: 446, 8, 9, 66, T. c.: 236, 7, 40, 1, 3, 4, 5), Tănăsescu N. (VII: 452, 3).

Clasa VIII-a: Roşală I. G. (T. c.: 242, 9, 51).

Liceul „Radu Greceanu" Slatina.

Clasa VIII-a: Constantinescu M. (T. c: 241, 4, 5).

Liceul militar „Mihai Viteazu" Târgu-Mureş.

Clasa IV-a: Buiacu A. (IV: 461), Mihalcu I. I. (IV: 452, 61), Păla-ceanu V. (IV: 452).

Clasa V-a: Boulescu M. V. (V: 537, 44).

Clasa VI-a: Amzică A. (VI: 527), Diaconescu N. (VI: 527), Marinescu P. (VI: 527), Munteanu T. (VI: 527), Vizireanu Şt. (VI: 527), Zaharescu V. G. (T. c.: 235, 6).

Clasa VII-a: Anghelichi E. R. (VII: 451*, 5, T. c.: 236, 7, 41, 4*, 5*).

Clasa VIII-a: Barbieru V. (VIII: 338*, T. c.: 236), Ciobanu R. (T. c.: 236), Ionescu A. D. (T. c.: 236), Măgeanu N. (VIII: 335), Mironescu D. (T. c.: 241), Paraipan N. C. (T. c.: 240, 1), Popescu C. (T. c.: 241), Topalescu G. (VIII: 334, 5, T. c.: 234, 5*, 6, 7, 9*, 40, 1, 3, 4*, 5*).

Liceul „D. A. Sturdza“ Tecuci.

Clasa VII-a: Sbârnea D. G. (VII: 453, 5, 62, 4*, T. c.: 241, 8, 51).

Liceul „C. Diaconovici Loga“ Timişoara.

Clasa VII-a: Bakonyi C. (VII: 450*, T. c.: 236, 7, 40*, 1*, 2*, 3, 4*, 5*, 6).

Liceul „Traian“ Turnu-Severin.

Clasa IV-a: Dumitrescu G. T. (IV: 453), Gheorghe G. (IV: 452), Papuc G. G. (IV: 457, 8, 60, 5*), Terfăloagă G. N. (IV: 465*).

Clasa VI-a: Corâciu I. (VI: 538, T. c.: 240, 1, 3*, 5, 6, 9, 50, 1, 3, 5), Iorgulescu M. (T. c.: 237)

Clasa VII-a: Mihail I. G. (VII: 449, 54, T. c.: 240, 1, 3).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Aprilie 1940

Clasa III-a. *Exerc. 109.* Două camere au lungimile, lăţimile înălţimile şi volumele respectiv în raportul $\frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{x}{4}$ şi $\frac{9}{8}$. Care cameră este mai înaltă? V. Gh.

III. 110. Diagonalele unor pentagoane asemenea formează alte pentagoane asemenea. C. I. B.

III. 111. Cât de greu era un aliaj cu titlul 0,900, dacă amestecat cu 13 g aliaj cu titlul de 0,940, a dat un aliaj cu titlul 0,910. N. M.

III. 112. Cum trebue să fie ordonate numerele

$$2^3 - \frac{1}{5^2}, \quad 2^3 + \frac{1}{5^2}, \quad 5^2 + \frac{1}{2^3}, \quad 5^2 - \frac{1}{2^3}$$

ca să formeze o proporţie? A. V. N.

III. 113. Intr'o sticlă se toarnă jumătate kg de vin şi 300 g sifon. Dacă vinul are 8% alcool, care este procentul de alcool pentru amestec? A. V. N.

III. 114. Care a fost preţul unei cărţi, dacă făcându-mi-se un rabat de 15% plătesc cartea cu 114 lei? A. V. N.

III. 115. Se dă un exagon neregulat ABCDEF şi se însemnează mijloacele laturilor sale cu A', B', C', D', E', F'. Se ia un punct O interior exagonului şi punctele simetrice lui O faţă de A', B', C', D', E', F' pe care le însemnăm cu G, H, I, J, K, L.

1°. Să se arate că poligoanele A'B'C'D'E'F' şi GHIJKL sunt asemenea;

2°. Perimetrul lui GHIJKL este egal cu suma perimetrelor triunghiurilor ACE şi BDF. G. D. S.

Clasa IV-a. *Exerc. 469.* Să se pună sub formă de produs expresia:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}+\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}.$$

G. D. S.

IV. 470. Se dă polinomul:

$$P\equiv 10xy^2z^3-100x^2y^3z^4+1000x^3y^4z^5-\ldots$$

în care se scriu termeni astfel ultimul să se împartă exact cu monomul $10^{50}x^{52}y^{54}z^{56}$. Să se scrie ultimul termen al polinomului P astfel format şi să se afle valoarea lui numerică pentru

$$x=-0{,}01\quad,\quad y=-1\quad,\quad z=0{,}1.$$

V. GH.

IV. 471. Dacă $x+y=2$, expresia

$$2x^2+3y^2+5xy-5x-7y+2$$

este nulă.

N. M.

IV. 472. Trei jucători de cărţi se învoiesc astfel: acel care câştigă o partidă primeşte dela fiecare din ceilalţi doi câte $\frac{1}{5}$ din suma ce are el. Ei joacă *cinci* partide: A câştigă primele două, B câştigă a treia partidă şi ultima, C câştigă a patra partidă. Dacă la începutul jocului A, B, C au a lei, b lei, c lei, să se afle ce sume au la sfârşitul partidei a cincea şi diferenţele dintre aceste sume şi acele iniţiale.

C. I. B.

IV. 473. Să se arate că

$$(x^3+2x-1)^3+(x^3-2x+1)^3\equiv 2x^3(x^6+12x^2+2x+3).$$

E. M.

IV. 474. Să se arate că

$$(a-b)\left[1+\frac{abc}{(a+b)^2}\right]+\frac{(a^3-b^3)c}{(a+b)^2}=(a-b)(1+c).$$

C. I. Ţ.

IV. 475. Să se găsească punctul din spaţiu egal depărtat de două plane date P şi Q şi asemenea egal depărtat de două puncte date A şi B. Discuţie.

O. N. Ţ.

IV. 476. Să se găsească punctul din spaţiu egal depărtat de două plane date P şi Q şi asemenea egal depărtat de două drepte paralele date D şi D'. Discuţie.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 555.* O bucată de aliaj de aur în greutate de 600 g şi cu titlul de 0,900 se topeşte cu o alta în greutate de 500 g obţinându-se aur cu titlul 0,800.

Se cere titlul celei de a doua bucăţi de aliaj de aur.

A. A. R.

V. 556. Să se rezolve sistemul:

$$2x^2 + 3xy + y^2 - 3x - y + \frac{13}{18} = 0$$

$$5x - 2y = \frac{11}{6}.$$

N. M.

V. 557. Fie P un punct din planul triunghiului ABC. Paralela dusă din O, centrul cercului circumscris lui ABC, la dreapta AP întâlneşte cercul AOP în A_1. Analog determinăm punctele B_1 şi C_1.

Să se demonstreze că cercurile $A_1B_1C_1$ şi ABC sunt egale.

† N. BOTEA.

V. 558. Un trapez are bazele egale cu *a*, *b* şi diagonalele egale cu *c*, *d*. Fie O intersecţia diagonalelor şi M, N mijloacele lor. Să se afle perimetrul triunghiului OMN.

C. I. B.

V. 559. Se dă un cerc (Γ) şi un punct A pe el. Se duc apoi coardele AB, AC, egale respectiv cu latura exagonului şi latura patratului înscris, aşezate deoparte şi de alta a diametrului ce trece prin A. Se mai construeşte coarda AD egală cu latura triunghiului echilateral în poziţia cea mai apropiată de AB. Dreptele BD, BC şi DC întâlnesc tangenta în A la cerc în punctele G, E şi F. Să se demonstreze că triunghiurile BCD şi CEF sunt isoscele, iar triunghiul DFG este dreptunghic.

G. D. S.

V. 560. Pentru ce valori ale lui *x* avem simultan:

$$\frac{ax-b}{a-b} - \frac{ax+b}{a+b} < \frac{2b^2}{a^2-b^2}; \quad \frac{a+bx}{a-b} - \frac{a-bx}{a^2-b^2} > \frac{2a}{a-b}.$$

E. M.

V. 561. Considerăm un cerc O de rază oarecare R şi un diametru al lui $\overline{MN}$. Pe $\overline{OM}$ considerat diametru construim cercul O'. Să se construiască în cercul O o coardă $\overline{AD}$, care să fie împărţită de cele două cercuri O şi O' în trei părţi egale:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}.$$

O. N. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 543.* Printr'o dreaptă dată Δ să se ducă un plan P pe care proiecţiile a două drepte date D_1 şi D_2 să fie paralele.

G. G. C.

VI. 544. Dacă $a + b + c = 2\pi$, avem:

$$3 + \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{b-c}{2} + \cos\frac{c-a}{2}$$

$$+ \cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2} + \cos\frac{c}{2} - \cos a - \cos b - \cos c \geqslant 0.$$

C. I. B.

VI. 545. Să se facă expresiunea

$$\frac{1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x}{1 + \sin x \cos x}$$

calculabilă prin logaritmi, punându-se sub forma cea mai simplă.

G. D. S.

VI. 546. Dacă $A + B + C = 45^0$, avem:

$$\sqrt{2} \cdot \Pi\left[\sqrt{(2+\sqrt{2})(1+\cos A)} - \sqrt{(2-\sqrt{2})(1-\cos A)}\right]$$
$$= \Sigma \sin A + \Sigma \cos A.$$

C. I. Ţ.

VI. 547. Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile:

$$E_1 \equiv \sin^2 x - 3\cos^2 x \quad ; \quad E_2 \equiv 3\sin^2 x - \cos^2 x.$$

E. M.

VI. 548. Să se arate că, oricare ar fi a şi b, avem:

$$\sin a + \sin b + \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(a+b) - \sin(a+b)]$$

$$\equiv -4\sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{b}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\sin\frac{a+b}{2}.$$

C. I. Ţ.

VI. 549. Să se arate că, oricare ar fi a și b, avem:

$$\cos a + \cos b + \sin(a+b) \equiv 4\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}\right)\cos\frac{a+b}{2}.$$

C. I. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 468.* Notându-se

$$f(x) \equiv 2(2x^3 + 3x^2 + x - 1)$$

să se calculeze suma

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n).$$

A. A. R.

VII. 469. Să se calculeze suma

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3},$$

unde $S_n = 1^n + 2^n + \ldots + n^n.$

A. A. R.

VII. 470. Să se arate că

$$\frac{S_1^2 \cdot S_4}{S_2 \cdot S_3} = \frac{3n^2 + 3n - 1}{5}$$

unde $S_n = 1^n + 2^n + \ldots + n^n.$

A. A. R.

VII. 471. Notându-se

$$f(x) \equiv 3x^2 + x - 1,$$

să se arate că:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2(n+2).$$

A. A. R.

VII. 472. Să se calculeze derivata funcțiunilor

$$y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \quad ; \quad z = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}.$$

G. G. C.

VII. 473. Să se calculeze derivata funcțiunii

$$y = \frac{a \sin^m nx + b \cos^n mx}{b \sin^n mx + a \cos^m nx}.$$

Să se găsească rădăcinile derivatei când $m - n = \pi$.

C. I. B.

VII. 474. Se dau în epură punctele A(75, 40, 28); B(132, 0, 21); C(152, 43, 0); D(125, 0, 39); E(152, — 20, 0) și se cere să se ducă prin punctul A un plan $P\alpha P'$ paralel cu dreapta BC și a cărui urmă verticală să fie perpendiculară pe proiecția verticală a dreptei DE. Să se ducă apoi în planul $P\alpha P'$ o dreaptă, prin punctul A, astfel ca raportul între depărtarea unei orizontale și cota unei verticale să fie 5/7. Să se afle intersecția dreptei DE cu planul $P\alpha P'$. [Epura se va executa pe o foaie de caiet. Linia pământului paralelă cu latura mare a foii, așezată la mijloc].

G. D. S.

VII. 475. Se dă polinomul

$$P(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m .$$

Se calculează derivatele succesive $P', P'', P''', \ldots, P^{(m)}$ și se așează cu termenii de același grad unii sub alții.

Să se calculeze valoarea determinantului coeficienților, lacunele fiind complectate cu zeruri.

V. GH.

VII. 476. Fie $y = \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$; să se arate că avem:

$$y''' = 4y \cdot \operatorname{tg} x - y'.$$

E. M.

Clasa VIII-a. *Exerc. 355.* Să se arate că punctele de intersecție ale curbelor:

$$x^2 + y^2 = R^4 \quad , \quad y^2 = Rx$$

formează un patrulater inscriptibil și să se determine locul geometric al intersecției diagonalelor patrulaterului atunci când parametrul R variază.

G. G. C.

VIII. 356. Se dă un cerc şi o parabolă cu vârful în centrul cercului. MN fiind o coardă a cercului şi Δ diametrul parabolei conjugat direcţiei MN, să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor MN, Δ când coarda MN se deplasează păstrându-şi lungimea.

C. I. B.

VIII. 357. Să se arate că polinomul:

$$P(x) \equiv m(m-1)\,x^{m+2} - 2(m+2)(m-1)\,x^{m+1} + (m+2)(m+1)\,x^m - 2(m+2)\,x + 2(m-1)$$

este divizibil cu $(x-1)^4$.

G. D. S.

VIII. 358. Se cere locul descris de punctul de intersecţie al medianelor triunghiului $A(a, o)$; $B(o, 2a)$; $C(\alpha, \alpha)$, când vârful C descrie bisectoarea $y = x$.

Să se reprezinte grafic locul geometric obţinut în cazul $a = 3$.

C. M.

VIII. 359. Se cere locul descris de ortocentrul triunghiului $A(a, o)$; $B(-a, o)$, $C(\alpha, \beta)$, când vârful C descrie parabola $y^2 = 2px$.

Să se reprezinte grafic locul obţinut în cazul: $a = 1$, $p = 2$.

Să se calculeze în acest caz aria A cuprinsă între locul obţinut şi parabolă.

C. M.

VIII. 360. Se dă dreapta variabilă:

$$4\alpha x - 5y + 2 = 0.$$

Să se afle locul geometric al piciorului perpendicularei coborîtă din origină pe dreapta considerată.

V. Gh.

VIII. 361. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_{m+1}}{x-a_{m+1}} = 0$$

ştiind că admite o rădăcină de ordinul m de multiplicitate.

V. Gh.

Toate clasele. *Exerc. 256.* Să se arate, *fără utilizarea metodei prin resturile diviziunei*, că avem:

$$2^{83} \cdot 5^{82} - 1 = \mathcal{M}7^2.$$

I. L.

T. C. 257. Să se arate că produsul numerelor:

$$2000! \text{ și } 2000! \pm 1$$

poate să fie divizibil cu *4001.*

I. L.

T. C. 258. Să se arate, cu ajutorul rădăcinilor primitive, că numărul $(7^5 + 1)$ se împarte exact cu *11.*

I. L.

T. C. 259. Numărul **1940** poate fi descompus în suma a două numere întregi și pozitive, ridicate la două puteri diferite, mai mari ca unitatea?

I. L.

T. C. 260. Numărul **1940** poate să fie diferența a două bipătrate?

I. L.

T. C. 261. Dacă un număr N are n factori primi și 2^n divizori, care este expresia indicatorului lui?

I. L.

T. C. 262. Dacă p este un număr prim, să se calculeze valoarea produsului:

$$\varphi(p)\ \varphi(p^2) \ldots \varphi(p^n)$$

unde $\varphi(1)$ este indicatorul lui 1.

I. L.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuş, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se vor scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, însoţit de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluţiilor se pot vedea indicaţiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Ţiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. — C. 59.529

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 5 1 FEBRUARIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 5 — 1 FEBRUARIE 1940

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa III-a. *Exerc. 85. Desemnaţi exact două dreptunghiuri; apoi, desemnaţi—tot exact—un pătrat a cărui suprafaţă să fie diferenţa suprafeţelor celor două dreptunghiuri date.*

V. GH.

Fie a, b ; a', b' dimensiunile celor două dreptunghiuri date. Trebue să avem:

$$x^2 = a \times b - a' \times b'$$

unde x este latura pătratului care trebue desemnat.

Dreptunghiurile au suprafeţe echivalente respectiv cu pătratele de laturi y şi z, cari reprezintă mediile proporţionale între a, b şi a', b'. Egalitatea scrisă devine

$$x^2 = y^2 - z^2$$

şi se vede aci că latura patratului care trebue desemnat este o catetă a unui triunghiu dreptunghiu care are ipotenuza de lungime y şi cealaltă catetă de lungime z.

Clasa VII-a. *Exerc. 442. Să se afle natura seriilor:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\log f(n)}}{n!} \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n(n+1)}(n+2)^n}$$

[$f(n)$ *reprezintă un polinom*].

V. GH.

1°. Aplicând criteriul lui D'ALEMBERT vom scrie:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{\log f(n+1)}}{1.2\ldots n(n+1)} \times \frac{1.2\ldots n}{a^{\log f(n)}}$$

$$= \frac{a^{\log f(n+1) - \log f(n)}}{n+1} = \frac{a^{\log \frac{f(n+1)}{f(n)}}}{n+1}.$$

Insă:

$$f(n) = A_0 n^m + A_1 n^{m-1} + \ldots + A_m$$

$$f(n+1) = A_0 (n+1)^m + A_1 (n+1)^{m-1} + \ldots$$

$$+ A_m = A_0 n^m + B_1 n^{m-1} + \ldots + B_m.$$

Vom avea deci

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{\log 1}}{\infty} = \frac{a^0}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1.$$

Deci seria este convergentă.

2°. Aplicăm criteriul lui CAUCHY şi scriem:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}(n+2)} = \frac{n^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+1}(n+2)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n(n+2)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{e}{\infty} = 0 < 1.$$

Deci şi această serie este convergentă.

Pentru toate clasele. *Exerc. 230. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:*

$$x + y^3 = x^3 + y.$$

V. GH.

Scriem ecuaţia dată sub forma

$$x^3 - y^3 - (x - y) = 0$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0.$$

O primă soluţie este deci $x = y$, unde x şi y reprezintă un acelaş număr, absolut de orice fel. Avem apoi:

$$y^2 + xy + x^2 - 1 = 0$$

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$$

y trebue să fie real, ceea ce impune:

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqslant x \leqslant +\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Apoi $4 - 3x^2$ trebue să fie un pătrat perfect, adică

$$4 - 3x^2 = k^2.$$

De unde

$$x^2 = \frac{4 - k^2}{3}.$$

Se vede că nu putem avea decât $k = 1$ şi $k = 2$ pentru a putea obţine pe x în condiţiile enunţului.

Rezultă deci, în afară de $x = y$, următoarele alte sisteme de soluţii:

Pentru $k = 1$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0\ ;\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1\ ;\ 0. \end{cases}$$

Iar pentru $k = 2$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = +1\ ;\ -1. \end{cases}$$

Până la 5 Ianuarie s'au primit soluţii bune pentru exerciţiile publicate în numărul 1, 2, 3 şi 4 anul VI, dela[1]):

Liceul „Carmen-Sylva" Bucureşti.

Clasa IV-a: Damian Lucia (IV: 466, 7), Enescu Rodica (IV: 452, 3, 60, 2), Georgescu Nicoleta (IV: 464, 5).

Clasa V-a: Silber Mira (V: 536).

Clasa VI-a: Georgescu Liliana (VI: 527*, 36, 40, T. c.: 251).

Clasa VII-a: Azimişoara (VII: 466), Craşoveanu Lucia (VII: 455, 9, 60, 6, 70*), Georgescu Diana (VII: 448), Ionescu Margareta (VII: 448), Vasilescu Petra (VII: 488), Vasilescu Alexandra (VII: 536), Vasiliu Margareta (VII: 455, 9, 60, 6, 76*).

Clasa VIII-a: Buzescu Cl. Georgeta (VIII: 334, 46), Constantinescu Paula (VIII: 335*), Niculescu Paula (VIII: 339).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Şcoala Centrală de fete Bucureşti.

Clasa IV-a: Braslă Elisa (IV: 464), Duţa Silvia (IV: 464), Grecu-lescu Mira (IV: 464), Motaş Rodica (IV: 464), Neagu Georgeta (IV: 464), Nicolau Paula (IV: 463), Niculescu Sanda (IV: 454, 61*, 5), Pogonat Tatiana (IV: 464), Popescu Niculina (IV: 464), Posdărescu Ligia (IV: 462), Sălăgeanu Elisabeta (IV: 464), Stătescu Dora (IV: 464), Teodorescu Viorica (IV: 464), Teodorescu C. Maria (IV: 452, 3, 61*, 5).

Clasa VI-a: Agapie Elena (VI: 540), Grünstein Floreta (VI: 527, 31, 40, T. c.: 249).

Clasa VII-a: Iavilier Maria (VII: 453), Ionescu Marcela (VII: 453), Perker Iosefina (VII: 453).

Liceul „Iulia Hajdău" Bucureşti.

Clasa IV-a: Masini Nivei (IV: 453), Cristescu Mariana (IV: 453).
Clasa VI-a: Dragomir Alexandra (VI: 521, 7*, 40, T. c.: 251*).
Clasa VII-a: Neumann N. Basilia (VII: 452).

Liceul „Domniţa Ileana" Bucureşti.

Clasa IV-a: Plachide Mioara (IV: 452, 3, 7, 65).

Liceul „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa III-a; Agopie Paula (III: 103, 8).
Clasa VII-a: Goldenberg Ada (VII: 452, 3, 60).

Liceul de fete Bacău.

Clasa VIII-a: Papadopol El. Demetra (VIII: 340*, 4, T. c.: 249).

Liceul „Oltea Doamna" Iaşi.

Clasa VI-a: Glanztein Rodica (VI: 540).

Liceul „Notre Dame de Sion" Iaşi.

Clasa IV-a: Copal Estera (IV: 453, 60, 1*, 4, 5, 6), Blimeş Fernanda (IV: 464, 9).

Liceul „Carabella" Târgovişte.

Clasa V-a: Şerban Elena (VI: 526).
Clasa VI-a: Lenca Elena (VI: 523, 5, 6).

Liceul de fete Timişoara.

Clasa IV-a: Nagy Elena (IV: 453, 63, 4, 6).

Liceul „Carmen-Sylva“ Timişoara.

Clasa IV-a: Roşu Georgeta (IV: 463, 5).
Clasa VI-a: Bakanyi Maria (VI: 523, 40).
Clasa VII-a: Gal Lili (VII: 455, 9, 65, 6), Ionescu Lucia (VII: 464, 5, 6), Leibovici Annie (VII: 448, 55, 66), Pleşa I. (VII: 453, 5, 9, 64, 5, 6), Severeanu Maria (VII: 464, 6).
Clasa VIII-a: Domonkoş O. Erica (VIII: 339).

Liceul „Aurel Vlaicu“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Mănescu I. (VI: 522*, 7, 32, 3).
Clasa VII-a: Barbaiani I. (VII: 335, 6, VIII: 446).

Liceul „C. Brâncoveanu“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Nadolu Gr. (VI: 521).
Clasa VII-a: Drăghicescu M. (VII: 459, 60, 2).

Liceul „Gh. Lazăr“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Brânceni B. (IV: 453), Elias F. P. (IV: 526, 40, T. c.: 243), Iliescu B. (T. c: 240).
Clasa V-a: Halpern I. E. (V: 522).
Clasa VI-a: Machedon D. (VI: 540).
Clasa VII-a: Andronie G. (VII: 450, 1*, 2, 66, 7, T. c.: 243, 51), Figator M. (VII: 466*), Moscovici N. (VII: 446, 8, 9, 70, T. c.: 243, 51), Nicolau C. (VII: 453, 5, 65, 9, 70, T. c.: 240, 1, 3, 4, 5), Popa Vladimir (VII: 446, T. c.: 243, 4, 5, 9, 50), Teodoroff I. (VII: 466, 9, 70).

Liceul „Matei Basarab“ Bucureşti.

Clasa III-a: Ieşean Al. (IV: 457).
Clasa IV-a: Alexandrescu I. (IV: 453), Antonescu E. (IV: 453, 67), Ardelean C. (IV: 453), Matei C. (IV: 453), Poplien S. (IV: 453, 7, 8, 64, 5, 6, 74), Stânga V. (IV: 453, 7, 65), Sturbey L. A. (IV: 462).
Clasa V-a: Bercovici L. (V: 532, 5, 6), Ghelber A. (V: 532, 6, 9), Covrigeanu R. (V: 539), Sachsa B. (V: 546), Saiovici E. (V: 535, 6, 9, 46, 52), Sternberg E. (V: 546).

Liceul „Sf. Gheorghe“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Andonie Şt. I. (VI: 533*).

Liceul „M. Eminescu“ Bucureşti.

Clasa V-a: Aron G. (V: 534, 5, 43).
Clasa VI-a: Dumitrescu G. (VI: 540).
Clasa VIII-a: Marinescu I. (VIII: 338).

Liceul „Mihaiu Viteazul“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Băluţă T. (VI: 527, 40, T. c.: 251), Predoleanu N. (VI: 521, 6, 7, 40), Trestian S. (VI: 521, 3, 5, 7, 30, 2, 40).

Clasa VII-a: Beno M. (VII: 459, 60*, 2, 3, 6, T. c.: 247, 8, 9, 51*, 3, 4), Ştefănescu D. (VII: 450, 1*, 2, 3).

Clasa VIII-a: Hart I. (VIII: 335), Nicolescu T. (VIII: 337, 8*).

Colegiul Naţional „Sf. Sava“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Bălcu N. (IV: 452), Coriolan A. (IV: 474), Dimos F. (IV: 469, 71, 3*, 4, V: 537, 60, VII: 527), Dumitrescu F. D. (IV: 457, 61*, 2, 3, 4, 5, 9, 71, 3, V: 545, 5), Ghorghiu T. (IV: 452, 65, 6), Ionescu D. (IV: 454, 61, 3, 5), Kogălniceanu V. (IV: 452, 60), Mişicu V. M. (IV: 469*, 71, 3, 4*, 7, V: 537, 51, 5, VI: 527), Moscovici (IV: 452, 3, 65), Nicolau H. (IV: 463, 4, 5, 6), Pistol C. (IV: 464, 6), Stănescu Papacostea E. (IV: 464).

Clasa V-a: Dumitrescu F. (V: 536), Fota G. (V: 536), Pop C. (V: 536), Stoika V. (V: 540).

Clasa VI-a: Botez R. (VI: 540, T. c.: 241, 9), Constantinescu I. (VI: 540), Ionescu G. (V: 527, 40), Pastia (V: 527, 40).

Clasa VII-a: Gheorghiade G. (VII: 450, 2, 6), Marinescu P. (VII: 460), Mihăileanu C. (VII: 446, 7, 50, 1*, 2, 3, 5, 6, 66, 8, T. c.: 243, 4, 5), Paşolescu T. (VII: 450, 2, 7), Peternelli P. (VII: 450, 2, 7).

Clasa VIII-a: Ghiţescu M. (VIII: 341), Gârneţiu J. (VIII: 334, 6, 40).

Liceul „Gh. Şincai“ Bucureşti.

Clasa V-a; Constantinescu E. (V: 532, 5, 6, VI: 521), Schwartz I. (V: 535).

Clasa VI-a: Iosipescu I. (VI: 521, 5, 6).

Clasa VII-a: Cutzer C. (VII: 452), Popa V. (VII: 451*).

Liceul „Spiru Haret“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Constantin I. (IV: 464).

Clasa V-a: Mişu N. (V: 537), Teodorescu A. (V: 556, 8, 60).

Clasa VI-a: Leiba M. (VI: 532).

Clasa VII-a: Andreescu M. (VII: 455), Mişu Al. (VII: 453).

Clasa VIII-a: Guralivu Şt. E. (VIII: 339), Racoviceanu (VIII: 340), Şeibulescu (VIII: 346).

Liceul „Sft. Andrei“ Bucureşti.

Clasa VII-a: Ganea M. (VI: 522*, 6, 7*, 30, 2, 3, 40), Şaranga I. (VII: 456, 66, 8, 70, 1), Filiti G. (VII: 446, 50, 1*, 2, 3, 5), Mihoci N. (VII: 452, 3), Mihail J. (VII: 460), Ştefanovici M. (VII: 465, 8, 70, 1), Senchi E. (VII: 459, 62, 5, 6, 8, 9, 70, 1, 6).

Liceul „T. Maiorescu“ București.

Clasa IV-a: Albulescu V. (IV: 452, 3), Romanovski (IV: 453, 7).
Clasa V-a: Slăvescu M. (V: 532, 3, 5).
Clasa VII-a: Niculescu M. (VII: 463, 4, 5, 6*, 8, 9, 70, 1, VIII: 347).
Clasa VIII-a: Profeta A. (VIII: 338, 9), Șerbănescu V. (VIII: 338).

Liceul „Schewitz Thierrin“ București.

Clasa VI-a: Păsărică I. (VI: 522, 40).

Liceul „Profesorii Asociați“ București.

Clasa V-a: Kladiu Alex. (V: 532, 6, 46).
Clasa VII-a: Marcussohn O. (VI: 460, 2, 6, T. c.: 249, 51), Nistoride A. (VII: 459).

Liceul „Moise Nicoară“ Arad.

Clasa V-a: Fleissig L. (V: 537, 51, 2, 4), Moțiu P. (V: 546. T. c. 249), Nistor I. (V: 551, 2), Popa T. (V: 551, 2), Popovici T. (V: 537, 52).
Clasa VII-a: Gligor I. (VII: 447, 50, 1*, 9, 65, 6).

Liceul „Ferdinand I“ Bacău.

Clasa VII-a: Bocăneală V. (VII: 452, 66), Dalban C. (VII: 446, 7, 52, 5), Frank T. (VII: 448, 55, 66), Iliescu A. (VII: 466, 8, 70, 1).

Liceul „Sft. Vasile“ Blaj.

Clasa IV-a: Balea (IV: 453, 6, T. c.: 237, 9, 49, 50, 1), Carnațiu I. (IV: 453, 4).
Clasa VIII-a: Cristea I. N. (VIII: 334).

Liceul „Laurian“ Botoșani.

Clasa VI-a: Coter M. (VI: 527, 32), Katz (VI: 527, T. c.: 243), Iordache I. (VI: 527, 32), Lați E. (VI: 532), Toma G. (VI: 532).
Clasa VII-a: Iacobanu T. (VII: 451, 3, 63, T. c.: 251), Löwensohn (VII: 447, 51, 66), Kling N. (VII: 447, 51, 2, 3), Munteanu Al. (VII: 446, 59, 62, 3, 4, 5, 6, T. c.: 251, 2), Riza (VII: 460, T. c.: 261), Tulpan F. (VII: 446, 7).
Clasa VIII-a: Grigoriu I. (VIII: 335, 6, 40).

Liceul „Avram Iancu“ Brad.

Clasa IV-a: Comșa I. (IV: 457, 8, VI: 454).

Liceul „Meșota“ Brașov.

Clasa IV-a: Dumitrașcu A. (IV: 465), Oatu G. (IV: 464), Panteli-monescu C. (IV: 464).

Clasa V-a: Hirschfeld I. (V: 537, 44).

Clasa VI-a: Halmagiu M. (VI: 540, 2, T. c.: 251).

Clasa VIII-a: Băncilă A. (VIII: 344, 6), Clopataki E. (VIII: 459), Rosenzweig M. (VIII: 339, 40, 4, 8).

Liceul „Andrei Şaguna" Braşov.

Clasa VII-a: Badea I. (VII: 459, 66, T. c.: 249, 51).

Liceul „N. Bălcescu" Brăila.

Clasa VI-a: Udrea A. I. (VI: 532).

Clasa VII-a: Aldea M. (VII: 460), Bălănescu V. (VII: 466), Cotariu M. (VII: 459, 64, 9, 51*, 4, 5*, 60*, T. c.: 242), Faniaru (VII: 464, 5, 8, 70, 1).

Clasa VIII-a: Trefilov I. M. (VIII: 358*, T. c.: 240, 8).

Liceul „B. P. Haşdeu" Buzău.

Clasa VII-a: Aldea M. (VII: 459, 60, 5, 6).

Liceul „Ştirbey Vodă" Călăraşi.

Clasa VII-a: Iancu G. (VII: 460, 6, 9, 70, T. c.: 244, 5), Ionescu V. (VII: 466), Mihalcu M. (VII: 453, 66, T. c.: 244, 5), Niculescu N. N. (VII: 461), Mateescu L. (VII: 468, 9, T. c.: 244, 5), Rădulescu M. (VII: 447, 59, 63, 6, VIII: 335, 40, T. c.: 240, 1, 9).

Liceul „D. B. Ştirbey" Câmpina.

Clasa IV-a: Cernat M. (IV: 464), Belloiu N. (IV: 452).

Clasa VI-a: Belloiu C. (IV: 540, T. c.: 240, 3, 51), Cernat I. (VI: 528, 40), Hoinărescu B. (VI: 528, 40), Heller H. (VI: 528, 40), Niculescu I. (VI: 527, 40), Popescu I. (VI: 540), Zecheru I. (VI: 540), Tudose I. (VI: 540), Ungureanu S. (VI: 527, 40, T. c.: 249).

Clasa VIII-a: Mihăilescu C. (T. c.: 249, 51).

Liceul „I. Assan" Caracal.

Clasa VII-a: Dumitriu G. (VII: 463), Langu T. (VII: 446, 8, 51, 3, 5, 66, T. c.: 243), Gligor D. (VII: 446, 7, 80, 1*, 2, 3, 7).

Liceul „A. Pumnul" Cernăuţi.

Clasa V-a: Rieber W. (V: 532, 5).

Liceul „Militar" Cernăuţi.

Clasa IV-a: Cortuşan I. (IV: 452, 63, 4, 5, 6), Nicolaescu I. (IV: 452, 63, 5, 6, 7, 8), Stoicu C. (IV: 452, 66), Vasiliu D. (IV: 452, 63, 6, 7).

Liceul „Mitropolitul Silvestru" Cernăuţi.

Clasa VI-a: Volschi Al. (IV: 451, V: 535).

Liceul militar „Ferdinand I“ Chișinău.

Clasa IV-a: Dumitrescu G. (IV: 452, 3), Grigoriu (IV: 452, 3, T. c.: 236), Rusu I. (IV: 452, 3).

Clasa V-a: Voicu G. (V: 544, T. c.: 236, 7, 43).

Clasa VI-a: Pacioglu C. C. (VI: 532).

Clasa VII-a: Moldoveanu D. (VII: 447, 66, T. c.: 236, 7, 8, 43, 4, 5).

Clasa VIII-a: Petcu V. (VIII: 336).

Liceul „Gh. Barițiu“ Cluj.

Clasa VI-a: Berariu M. (VI: 525, 35, 6, 40), Capdebo (VI: 523, 6, 40), Botha A. (VI: 525), Mărcuș V. (VI: 536).

Clasa VII-a: Gheorghieș R. (VII: 453, 9, 63, 6), Nieman L. (VII: 459), Oancea (VII: 452, 60).

Clasa VIII-a: Demetrescu I. (VIII: 344, 51*), Gurisatti L. (VIII: 335, 6).

Liceul „Școalei Normale Superioare“ Cluj.

Clasa VII-a: Botha L. (VII: 446, 66), Marinescu P. (VII: 446), Vlad (VII: 459).

Liceul „Mircea cel Bătrân“ Constanța.

Clasa VI-a: Sotiriu T. (VI: 525, 32, 3, 5*, 6, 8).

Liceul „Frații Buzești“ Craiova.

Clasa IV-a: Marian D. (IV: 460, 1, 3, 4, 5).

Clasa VI-a: Barbian G. (VI: 527, 40).

Clasa VIII-a: Marian I. (VIII: 333, 5, 6, 8, 41).

Colegiul Național „Carol I“ Craiova.

Clasa VIII-a: Pacomian M. (VIII: 336, 7, 8).

Liceul militar „D. A. Sturdza“ Craiova.

Clasa IV-a: Braniște C. (IV. 452, 3), Burnea D. (IV: 452, 3, 63), Călinescu (IV, 452, 3, 63), Corsianu C. (IV: 452, 3, 4, 63, V: 536), Cojocaru (IV: 451), Constantinescu T. (IV: 452, 3, 63, 6), Cosma (IV: 452, 3), Muscurel C. (IV: 452, 3, 63), Negruș B. (IV: 452, 3, 64, V: 536), Nicolaescu N. (IV: 452, 4, 7), Nițescu S. (IV: 452, 66, V: 536), Pârvan I. (IV: 452, 3, 64, V: 536), Udrea I. (IV: 452, 3, 4*, 5, 61, 3, V: 536).

Clasa V-a: Anchescu M. (V: 535, 7), Botezatu T. (V: 537), Coșereanu (V: 537), Dinculescu (V: 535), Dogaru (V: 535), Duduța T. (V: 537), Encuțescu A. (V: 537), Ghinea M. (V: 537), Ioanașcu (V: 535), Marincu I. (V: 537), Păsărică V. (V: 537), Procopie V. (V: 535, 7), Popescu (V: 535), Sbenghe M. (V: 535), Vilaia G. (V: 535, 7), Zamfir M. (V: 537).

Clasa VI-a: Barbuceanu (VI: 527, VII: 452, T. c.: 236, 7), Cercel V. (T. c.: 237), Ceaușu V. (T. c.: 236, V: 535*), Cioc M. (VI: 521), Dobrescu P. (V: 527, 35, T. c.: 237), Drăgan Z. (VI: 535, VII: 452, T. c.: 237), Dănulescu G. (T. c.: 237), Diaconu A. (T. c.: 237), Diaconu N. B. (T. c.: 236),

Dunăreanu O. (T. c.: 236), Heinrich C. (T. c.: 236), Jascu S. (T. c.: 237), Mateescu A. (VI: 521, 3, 6, 7, 40, VII: 453, T. c.: 236, 7), Movanu P. (VI: 521, 6), Mărculescu T. (T. c.: 237), Mănescu M. (T. c.: 237), Mateescu C. (T. c.: 236), Minciulescu D. (T. c.: 236), Morait R. (T. c.: 236), Negrilă (VI: 523, 7*). Paşoi (T. c.: 234, 6, 7), Popa E. (T. c.: 237), Popescu G. G. (T. c.: 236), Popescu D. V. (T. c.: 237), Stănică (VI: 527, 35, VII: 452, T. c.: 236, 7), Teodorescu V. (T. c.: 236), Tomescu (T. c.: 236), Tuta S. (VI: 527, 35, VII: 452, T. c.: 236), Vlăsceanu C. (T. c: 236), Zaharia S. (VI: 521, T. c.: 234).

Clasa VII-a: Marinescu (VII: 447, 66).

Clasa VIII-a: Bărbulescu (VIII: 335, 8), Constantinescu G. (VIII: 335, 6, 7, 8, T. c: 242*, 3, 5, 9*, 51*)· Pârscoveanu F. (VIII: 335, 7).

Liceul „Gr. Ghica" Dorohoi.

Clasa VII-a: Stoica I. A. (VII: 446, 51, 62, 3, 5, 6).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa V-a: Nedelescu G. (V: 537, 8*, 46).

Clasa VI-a: Şerbănescu G. (VI: 521, 5).

Clasa VII-a: Petrescu G. (VII: 464).

Clasa VIII-a: Baruch M. (VIII: 340, T. c.: 243, 4, 5), Nicoară T. (VIII: 349, 51*, 8, 60).

Liceul „V. Alecsandri" Galaţi.

Clasa VII-a: Abeles F. (T. c.: 241, 4, 5, 6, 51, 3, 5).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VII-a: Marinescu N. (VII: 522, 3, 66), Petrescu G. (VII: 459, 65, 71).

Clasa VIII-a: Cherţman M. (VIII: 333, 5*, 6, 40, 51*, 60, T. c.: 234, 40, 1, 4, 5, 9, 51), Văduva F. M. (VIII: 339, T. c.: 249, 62*).

Liceul „Naţional" Iaşi.

Clasa V-a: Nacht S. (V: 535, 6, 9, 40, 6, 51, 2, 3, 4, 5, 6, 60).

Clasa VI-a: Buchmann D. (VI: 521, 7, 32).

Clasa VII-a: Rosenhaupt S. (VII: 447, 53, T. c.: 243, 4, 5), Secu (VII: 447, 51, 3, 5, T. c.: 243, 4, 5), Strochi (VII: 451, T. c.: 238).

Clasa VIII-a: Rosenrauch F. (VIII: 335, 6).

Liceul Internat „C. Negruzzi" " Iaşi.

Clasa VI-a: Cărbunaru P. (VI: 527, 34, 40, VII: 452, T. c.: 249, 56), Manolache (VI: 540, T. c.: 249, 51, 4), Rabinschi N. (VI: 521, 40, T. c.: 244).

Clasa VII-a: Costinescu Al. (VII: 446, 7, 50, 1, 2), Păslăraşu I. (VII: 446, 7, 51, 60, T. c.: 244, 5).

Clasa VIII-a: Scraibman S. (T. c.: 249, 56).

Liceul militar „G-ral Makarovici“ Iaşi.

Clasa IV-a: Chirică N. (IV: 452, 63, 4), Ganea N. (IV: 452, 63, 4), Puiu V. (IV: 465), Opran M. (IV: 456, 63, 4), Tănase V. (IV: 452, 4, 63, 4), Turculeţ I. (IV: 465).

Clasa VI-a: Drăghicescu P. (VI: 535, 8, 40, T. c.: 249, 51*), Mihăiescu (VI: 526), Manolescu R. (VI: 526), Popa N. A. (VI: 532, 8, 40, 1, T. c.: 249, 50, 1).

Clasa VIII-a: Gheorghiu A. (T. c.: 234), Rohr A. (VIII: 341, 54, T. c.: 248, 9, 51, 4, 5), Ivan Z. (T. c.: 236), Jiltcovici (VIII: 339, T. c.: 249, 50, 1, 2, 5), Paşcanu C. (T. c.: 249, 51, 5), Petrescu V. A. (VIII: 330).

Liceul „Petru Rareş“ Piatra-Neamţ.

Clasa VII-a: Marcovici A. (VII: 455, 9, 62, 6, T. c.: 249*), Schapira S. (VII: 447, 52, 3, 66, 8, 9, 70, 1, 6, T. c.: 243, 9, 51).

Clasa VIII-a: Soroceanu D. (VIII: 335, 6, 7, 44, 9*).

Liceul „I. C. Brătianu“ Piteşti.

Clasa V-a: Popescu G. M. (V: 534), Voicu I. (V: 537, 9, 44, 52, 3, 7).

Clasa VII-a: Gheorghiu P. (VII: 448, 51, 2, 3).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel“ Ploeşti.

Clasa IV-a: Jupcianu N. N. (IV: 453, 4, 8*, 61*, 2, 3*, 5, 6, V: 537, T. c.: 234), Ştefănescu T. (IV: 457, 65, T. c.: 249, 51), Vintilescu G. (IV: 460).

Clasa V-a: Weitzman I. (V: 536, 46, 8, 51, 2, 3, 4, VI: 463, 6, VII: 462, T. c.: 251), Bercanu B. (V: 532, 4, 6, 40, VI: 450, VII: 459, 62, 6, T. c.: 251), Vernescu M. (V: 551), Weitsman I. (VI: 533).

Clasa VIII-a: Constantinescu V. (VIII: 341), Vasilescu N. Gh. (VIII: 339).

Liceul „Principele Nicolae“ Sighişoara.

Clasa VII-a: Tănăsescu N. (VIII: 460, 6), Deac C. (T. c.: 242, 9, 51).

Clasa VIII-a: Roşala G. (VIII: 334, 7, 8, 9, 46).

Liceul militar „N. Filipescu“ Mânăstirea Dealu.

Clasa III-a: Marinescu M. (III: 95, 100), Ghiţă V. (III: 99, 100).

Clasa IV-a: Alexandrescu N. (IV: 454), Berberianu (IV: 464, 5*), Chirică N. (IV: 454), Oncescu M. (IV: 453, 7, 8, VII, 470), Rainu (IV: 465*), Turtoiescu L. (IV: 457, 8, 65).

Clasa V-a: Petrescu S. (V: 554), Stoianovici Ş. (V: 537, 40, 6, 51, 2, 4, 9, 65, 6, VI: 534, 5, VII: 460, T. c.: 249), Anastasescu Al. (V: 546, 51), Alexandrescu N. (V: 551), Atanasescu S. (V: 546), Columbeanu S. (V: 546, 51), Constantinescu C. (V: 546, 51), Burs I. (V: 539, 40, 6, 51), Barbici I. (V: 527, 37), Bunescu G. (V: 537), Cristescu C. (V: 536, 7), Dumitrescu D. (V: 537, 46, 51), Drăgulescu D. (V: 537 46,), Filipescu M. (V: 537, 46),

Gheorghiu M. (V : 546), Iordănescu (V : 546, 51), Mihuțiu (V : 546), Neagu (V : 552), Nicolaie (V : 537), Nogacevski (V : 546, 52), Pârligos (V : 546), Păunescu I. (V : 537, 46), Petrescu V. (V : 537, 46), Popa M. (V : 546), Popa A. (VI : 535, 6), Popescu D. (V : 537, 46), Popescu G. (V : 546), Rădulescu F. (V : 537, 46), Săveanu I. (V : 546, 52), Stroe G. (V : 540, 6), Vecelly Al. (V : 546).

Clasa VII-a : Adrian D. (T. c. : 241, 3, 4, 5), Andronescu (VII : 466), Ceaușelu (VII : 451, 3, 5), Dragomir E. (VII : 448, 9, 52, VIII : 335), Iordănescu P. (VII : 460), Lupoaie F. (VII : 450, 1, 3, T. c. : 241, 3), Mastera L. (VII : 450), Popescu C. (VII : 451), Popescu L. (VII : 450), Predoiu N. (VII : 460, 6, T. c. : 243, 9), Prungu N. (VII : 453, 66), Rudeanu (VII : 466), Șerban C. (VII : 450, 65, T. c. : 249), Vijelie E. (VII : 451*, 2*, 66, T. c. : 240, 1, 9, 51, 4).

Clasa VIII-a : Anastasiu D. (VIII : 337*, 40, T. c. : 241, 3, 51), Andrievici N. (VIII : 337*, 8, 9, 44, 51*), Bogza A. (VIII : 335, 6), Buznea D. (VIII : 334, 5, 6, 7*, 8), Cernat C. (VIII : 335, 6, 7*, 8, 9), Staicu N. (VIII : 335, 6, 7*, 8*, 9, 41), Stoenescu (VIII : 335*, 9, 41, 4, 9, 51*).

Liceul „C. Diaconovici Loga“ Timișoara.

Clasa IV-a : Iacob I. (IV : 451, 2, 3, 61, 3, 4, 8, T. c. : 249).

Clasa V-a : Bululex S. (T. c. : 251).

Clasa VI-a : Bubulete V. Șt. (VI : 532).

Clasa VII-a : Bakonyi C. (VII : 459, 61, 3, 4, 8, 9, 70, 1. T. c. : 249), Boleontu L. (VII : 452, 3), Mannheim A. (VII : 459, 66).

Liceul „Sf. Haralambie“ Turnu-Măgurele.

Clasa V-a : Caragea N. (V : 537, 46, 52).

Clasa VIII-a : Stoga M. (VIII : 333, 5, 8, 9).

Liceul „D. A. Sturdza“ Tecuci.

Clasa VII-a : Sbârnea G. (VII : 459, 60, 5, 6, VIII, 333).

Liceul „Traian“ Turnu-Severin.

Clasa IV-a : Papuc G. (IV : 464, T. c. : 249, 53), Dumitrescu Tr. (IV : 474), Terfeloagă N. (T. c. : 249).

Clasa VI-a : Firoiu R. (VI : 527, 32, 4, 8, 40, T. c. : 251), Corăci (VI : 539, VII : 460, 1).

Clasa VII-a : Uidilă I. (VII : 466).

Liceul militar „Mihai Viteazu“ Târgu-Mureș.

Clasa IV-a : Gâlceavă I. (IV : 457, 8).

Clasa V-a : Mihăiescu M. (V : 537, T. c. : 249, 51, 5).

Clasa VII-a : Anghelichi R. (VII : 459, 64, 5, 6, T. c. : 249, 51, 5), Costache N. (T. c. : 243).

Clasa VIII-a : Bărbieru V. (VIII : 335), Topalescu G. (T. c. : 249*, 51, 3).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Mai 1940

Clasa III-a. *Exerc. 116.* Se dă un trapez ABCD, dreptunghiu în A și D, iar $\overline{CB} = \overline{CD}$. Cunoscând baza mică $\overline{AB} = 6m$ și $\overline{AD} = 8m$, să se calculeze celelalte laturi și diagonalele trapezului.

G. D. S.

III. 117. Un triunghiu ABC are $\overline{AB} = \frac{2}{3}$ cm, $\overline{AC} = \frac{3}{5}$ cm și înălțimea $\overline{AA'}$ egală cu $\frac{1}{2}$ cm. Fie A'' punctul în care AA' taie cercul ABC, circumscris triunghiului. Să se calculeze $\overline{A'A''}$, $A''B$, $\overline{A''C}$.

C. I. B.

III. 118. Bisectoarea AM a triunghiului oarecare ABC întâlnește cercul ABC, circumscris triunghiului, în punctul N. Să se arate că triunghiurile ABM, MNC, ACN sunt asemenea. La fel triunghiurile AMC, MNB, ABN sunt asemenea.

C. I. Ț.

III. 119. Se dă un paralelogram ABCD și se prelungesc laturile în același sens astfel că:

$$\overline{AB} = \overline{BB'}\ ,\ \overline{BC} = \overline{CC'}\ ,\ \overline{CD} = \overline{DD'}\ ,\ \overline{DA} = \overline{AA'}.$$

Să se arate că patrulaterul A'B'C'D' este un paralelogram cu aria de cinci ori mai mare ca a paralelogramului ABCD.

Patrulaterele A'BC'D , AB'CD' sunt paralelograme cu ariile de două ori mai mari ca aria paralelogramului ABCD.

C. I. Ț.

III. 120. Paralelele, duse prin B și C respectiv la catetele AC și AB ale triunghiului dreptunghiu ABC, taie înălțimea AD în E și F. Să se arate că triunghiurile BDE și CDF sunt asemenea. Să se găsească ariile acestor două triunghiuri știind că:

$$\overline{AB} = 1{,}56m\ ,\ \overline{AC} = 0{,}65m.$$

E. M.

III. 121. Catetele unui triunghiu BAC (cu unghiul drept în A) sunt proporționale cu numerele *187* și *84*, iar perimetrul triunghiului are ca măsură *42,84m*. Să se calculeze: *a)* Suprafața triunghiului BAC; *b)* Lungimea cercului BAC.

O. N. Ț.

III. 122. In triunghiul dreptunghiu BAC (cu unghiul drept în A) împărțim înălțimea AD în trei părți egale:

$$\overline{AH} = \overline{HG} = \overline{GD}.$$

Paralelele duse prin H și G la BC întâlnesc respectiv pe AC și AB în F și E. Știind că măsurile catetelor $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$ sunt respectiv *16,83m* și *7,56m*, să se calculeze lungimea segmentului $\overline{EF}$ cu aproximație (cu eroare) mai mică ca 0,01.

O. N. Ț.

Clasa IV-a. *Exerc. 477.* Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x}{1+\dfrac{2}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4}}}} + \frac{2}{3+\dfrac{3}{4+\dfrac{1}{5}}} = \frac{86}{39} - \frac{x}{4+\dfrac{1}{5}}.$$

Să se verifice soluția.

G. D. S.

IV. 478. Un dreptunghiu ABCD are $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. Pe AB se ia punctul E astfel încât $\overline{AE} = c$. Paralela dusă din E la diagonala AC taie dreapta CB în F. Să se calculeze distanțele punctelor B și D la dreapta EF.

C. I. B.

IV. 479. Să se găsească baza sistemului de numerație în care numărul *101* din baza *zece* se scrie *203*.

A. A. R.

IV. 480. Se dau două plane (P) şi (P'), intersectându-se după dreapta (D). In fiecare din aceste plane se găseşte câte un cerc, (C) şi (C'), de rază R, tangente la dreapta D în punctele A şi A'. Cum trebue să fie $\overline{AA'}$ astfel încât rotind planul (P') în jurul lui (D) şi suprapunându-l peste (P), cele două cercuri să ajungă în una din aşezările:

1°. exterioare; 2°. tangente; 3°. secante; 4°. confundate.

V. Gh.

IV. 481. Pe un câmp se lasă un cârd de ciori. Din ele se duc jumătate mai puţin una, dar vin o treime din câte au plecat; apoi din nou pleacă jumătate plus una dar vin din nou cât o cincime din câte au plecat şi iar se duc jumătate mai puţin una din câte sunt. Câte ciori rămân pe câmp în această ultimă clipă, dacă sunt atunci cu opt mai mult decât un sfert din câte s'au lăsat la început?

O. N. Ţ.

IV. 482. Se consideră în spaţiu un punct A şi o dreaptă D. Să se găsească locul proiecţiei punctului A pe planul (P) trecând prin dreapta D, când (P) se roteşte în jurul acestei drepte.

O. N. Ţ.

IV. 483. La o cărămidărie sunt cărămizi arse gata aşezate în patru rânduri. In al doilea rând sunt atâtea cât fac o treime din primul rând după ce am dat la o parte o cărămidă; dacă mai punem la al treilea patru cărămizi avem cât o cincime din primele două la un loc. In al patrulea rând, dacă dăm la o parte opt cărămizi rămân tocmai cât o şeptime din primele trei rânduri la un loc, iar dacă dăm la o parte numai şapte cărămizi rămân o optime din câte cărămizi sunt în cele patru rânduri. Câte cărămizi erau în total şi câte pe fiecare rând?

(Se va lua o singură necunoscută).

O. N. Ţ.

IV. 484. Se consideră o perpendiculară OA în punctul O pe planul P şi un segment de dreaptă BC aşezat în planul P. Cum trebue să fie aşezat segmentul BC, pentru ca dacă AI este bisectoarea unghiului BAC, OI să fie asemenea bisectoarea unghiului BOC. (Punctul I bineînţeles este pe dreapta BC).

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 562.* Se dă ecuația

$$\sqrt{a}+\cfrac{x}{\sqrt{a}+\cfrac{x}{\sqrt{a}+\cfrac{a}{\sqrt{a}}}}=\lambda\sqrt{a}\ .$$

Să se determine λ astfel ca suma inverselor rădăcinilor adunată cu inversul sumei lor să dea $\frac{1}{a}$.

G. D. S.

V. 563. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației

$$x^2+px+q=0$$

de realizant r; să se formeze ecuația cu rădăcinile

$$x_1=\frac{x_1}{x_2^2}\quad,\quad x_2=\frac{x_2}{x_1^2}\ .$$

Să se arate că realizantul ei este

$$R=r(p^2-q)^2.$$

Caz particular

$$q=p^2.$$

N. M.

V. 564. Să se limiteze aria în planul axelor de coordonate OX, OY astfel ca, să avem inecuațiile următoare:

$$x>0;\ y>0;\frac{x}{3}+\frac{y}{4}<1;\ (x-1)^2+(y-1)^2>1$$

satisfăcute.

C. I. Ț.

V. 565. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației:

$$x^2+px+q=0,$$

să se formeze ecuația care are rădăcinile:

$$x'=x_1-\frac{1}{x_2}\quad,\quad x''=x_2-\frac{1}{x_1}\ .$$

In ce caz rădăcinile ecuației formate vor fi inverse una alteia.

E. M.

V. 566. Fie ABCD un patrulater cu diagonalele perpendiculare.

a) Prin mijloacele laturilor sale trece un cerc;

b) Dacă M, N, P, Q sunt punctele în care cercul taie a doua oară dreptele AB, BC, CD, DA, avem:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1.$$

C. I. B.

V. 567. Se dau ecuaţiile:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad max^2 + nbx + pc = 0.$$

Să se arate că dacă $n^2 = mp$, ele au rădăcinile de aceeaşi natură.

V. Gh.

V. 568. Să se construiască două cercuri secante cunoscând razele lor R şi R', precum şi unghiul α sub care se taie cercurile cerute.

V. Gh.

V. 569. Intr'un cerc este înscris un triunghiu ADC, având latura AC egală cu latura triunghiului echilateral ABC înscris în acelaşi cerc, iar aria triunghiului ADC este $\frac{2}{3}$ din aria triunghiului ABC. Să se arate că:

$$\sphericalangle ADC = 2 \sphericalangle DAC = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \overline{AC} = 3R_1,$$

unde R_1 este raza cercului circumscris triunghiului echilateral de latură $\overline{CD}$.

C. I. Ţ.

V. 570. Se consideră două cercuri (O) şi (C) cu centrele în punctele O şi C cu razele R şi 2R, tangente exterioare în punctul A. Fie $\overline{MN}$ o tangentă comună exterioară a acestor două cercuri, B punctul unde dreapta OC taie a doua oară cercul O, punctul I mijlocul lui $\overline{MN}$, iar T şi S punctele unde secanta OTS paralelă cu BI taie cercul C. Să se calculeze segmentele secantei OTS cuprinse între dreapta AI şi cercul C.

O. N. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 550.* Să se arate că între elementele unui triunghiu avem:

$$b^2 \sin^2 \frac{C}{2} \cos^2 \frac{C}{2} + c^2 \sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2} = 2bc \sin B \sin C.$$

GH. B.

VI. 551. Să se arate că:

$$\frac{\sin(a+2b) - \sin(a-2b)}{\operatorname{tg}(2a+b) - \operatorname{tg}(2a-b)} = \frac{\cos(a+2b) + \cos(a-2b)}{1 + \operatorname{tg}(2a+b) \operatorname{tg}(2a-b)}.$$

E. M.

VI. 552. Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu în care sunt cunoscute o catetă l și raportul m al segmentelor determinate de înălțime pe ipotenuză.

Aplicație: $l = 20$ cm ; $m = \frac{9}{16}$.

E. M.

VI. 553. Să se arate că

$$\Sigma \sin x \left[\frac{\cos^2 y}{1 + \sin x \sin y} - \frac{\cos^2 z}{1 + \sin x \sin z} \right] = 0.$$

N. M.

VI. 554. Să se găsească unghiurile unui triunghiu dreptunghiu între laturile căruia avem relația:

$$a = 2b - 3c.$$

V. GH.

VI. 555. Să se arate că, într'un triunghiu dreptunghiu, bisectoarea unghiului drept este dată de expresia:

$$R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}\right) \cdot \left[1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}\right)\right],$$

R fiind raza cercului circumscris, iar C fiind cel mai mic unghiu al triunghiului.

C. I. Ț.

VI. 556. Se dă un plan P, o dreaptă D aşezată în acest plan şi un punct A în afara planului. Să se construiască un triunghiu dreptunghiu ABC, având ipotenuza BC în planul P şi îndeplinind următoarele condiţiuni:

a) Vârful B să fie pe dreapta D;

b) Cateta AB să facă unghiul dat α cu planul P;

c) Cateta AC să facă unghiul dat β cu planul P.

Discuţie.

G. D. S.

VI. 557. Fie $\overline{AB}$ diametrul unui cerc cu centrul în O şi fie C mijlocul arcului AB. Prin C ducem dreapta Δ pe care luăm $\overline{CD} = \overline{AB}$.

a) Cum trebue dusă Δ pentru ca BD să fie tangentă la cerc?

b) E fiind punctul în care CD taie cercul, să se calculeze $\overline{AE}$.

C. I. B.

VI. 558. Se consideră un triedru $Oxyz$ astfel ca unghiul AOB să fie drept, iar unghiurile BOC şi COA respectiv egale cu $\frac{\pi}{3}$; punctele A şi B fiind respectiv pe muchiile OX şi OY la egală distanţă de vârful O, iar C pe muchia OZ, astfel ca triunghiul ABC să fie echilateral. Să se demonstreze că distanţele $OA = \overline{OB}$ sunt egale cu latura dodecagonului regulat înscris în cercul de rază $\overline{OC}$.

G. G. C.

Clasa VII-a. *Exerc. 477.* Fie $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ derivatele, de primul şi al doilea ordin, ale funcţiunei $\varphi(x)$. Să se calculeze derivata y' a funcţiunei:

$$y = \frac{\operatorname{tg}\varphi(x) - \operatorname{cotg}\varphi(x)}{\varphi'(x)}$$

şi să se arate că verifică egalitatea:

$$y' = \left[\frac{\varphi'}{\cos 2\varphi}\right]^2 \cdot y^2 - \frac{\varphi''}{\varphi'} y.$$

† N. BOTEA.

VII. 478. Să se deriveze funcţia

$$y = \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \arcsin\frac{1}{x}\right] . x(\log x)^m.$$

G. G. C.

VII. 479. Să se calculeze derivata funcţiei

$$y = \begin{vmatrix} \arcsin x & (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \arcsin 2x & 2(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} & 8x(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \arcsin 3x & 3(1-9x^2)^{-\frac{1}{2}} & 27x(1-9x^2)^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} .$$

C. I. B.

VII. 480. Să se calculeze derivatele funcţiilor

$$y = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad z = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

şi să se explice rezultatul obţinut prin derivarea primei funcţiuni.

Să se arate apoi că avem relaţia

$$\frac{y'}{\cos^2 y \,.\, \operatorname{tg}^3 y} = \frac{z'}{\cos^2 z \,.\, \operatorname{tg}^3 z} .$$

G. D. S.

VII. 481. Să se deriveze

$$y = \arcsin\frac{\cos x - \cos x \cos 4x}{\sin 3x + \sin x} \quad ; \quad z = \arccos\frac{\sin x + \sin x \cos 4x}{\sin 3x - \sin x}$$

şi să se explice rezultatele.

E. M.

VII. 482. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \frac{2\sin^2 x - 1}{1 - \cos x}$$

şi să se reprezinte această variaţie.

E. M.

VII. 483. Să se arate că

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}(\sin^3 x + \sin^3 2x + \ldots + \sin^3 nx) =$$

$$= \left[\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)\right]^2 .$$

A. A. R.

VII. 484. Să se studieze variația funcției

$$y = + \sqrt{\cos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\pi\right)} .$$

O. N. Ț.

Clasa VIII-a. *Exerc. 362.* Să se studieze natura rădăcinilor ecuației

$$3x^5 - 5x^3 + \lambda^6 = 0$$

după valorile parametrului λ.

G. G. C.

VIII. 363. Se dă o elipsă și o parabolă având focarul F în unul din focarele elipsei și directoarea trecând prin al doilea focar. $\overline{AA'}$ fiind axa mare a elipsei, iar M și N punctele comune elipsei și parabolei, să se găsească locul geometric al intersecției dreptelor A'M, AN când F descrie segmentul AA'.

C. I. B.

VIII. 364. Se dau punctele fixe A, B și un punct M mobil pe AB. Pe perpendiculara în M pe AB se ia un punct P așa încât

$$\overline{PA} = \overline{MB}.$$

Să se arate, că punctul P se mișcă pe o parabolă, atunci când M se mișcă pe AB. Care sunt punctele M de pe AB, pentru care construcția lui P nu este posibilă.

Gh. B.

VIII. 365. Se consideră cercurile

$$x^2 + y^2 + (2\alpha - 3\beta + 1)\,x + (-5\alpha + 2\beta - 7)\,y + \left(7\alpha^2 + 3\beta^2 - 8\alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{23}{2}\right) = 0$$

unde α, β, sunt parametri variabili.

1°. $M(\alpha, \beta)$ fiind un punct în planul axelor $O\alpha$, $O\beta$, să se separe acest plan în regiuni după cum cercurile date sunt reale, nule sau imaginare.

2°. α, β, fiind legați prin relația: $7\alpha - 5\beta + 8 = 0$, să se afle locul centrelor cercurilor considerate.

V. Gh.

VIII. 366. Se dă parabola $y^2 = 2px$. Fie M un punct pe parabolă. Tangenta în M taie axele în A și B. Se cere:

1°. Aria mărginită de parabolă, tangentă și axa absciselor;

2°. Să se arate că B este la mijlocul lui AM;

3°. Dacă M este mobil pe parabolă, să se afle locul mijlocului lui $\overline{AB}$.

E. M.

VIII. 367. Să se studieze cu ajutorul teoremii lui Rolle natura rădăcinilor ecuației:

$$6x^6 - 42x^5 + 73x^4 - 70x^3 + 18x^2 + \alpha = 0,$$

când parametrul α variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

G. D. S.

VIII. 368. Fie ecuația $x^3 + px + q = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se formeze ecuația cu rădăcinile:

$$X_1 = x_1 + \frac{\alpha}{x_1}\ ,\quad X_2 = x_2 + \frac{\alpha}{x_2}\ ,\quad X_3 = x_3 + \frac{\alpha}{x_3},$$

α fiind o rădăcină a ecuației

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 p + \alpha p^2 + q^2 = 0;$$

ecuația transformată are o rădăcină nulă.

N. M.

VIII. 369. Dacă rădăcinile ecuației

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

sunt toate pozitive și subunitare, avem inegalitatea:

$$p > 1 + q.$$

C. I. Ț.

VIII. 370. Să se determine m și să se rezolve ecuația

$$6x^3 - mx^2 + 6x - 1 = 0$$

știind că rădăcinile satisfac relația:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \operatorname{arccotg} x_3$$

E. M.

Toate clasele. *Exerc. 263.* In ce caz suma a două fracții este egală cu *medianta* lor?

I. L.

T. C. 264. Să se găsească un patrat de patru cifre produs de două patrate și astfel ca suprimând cifra sutelor să obținem un patrat de trei cifre.

O. N. Ț.

T. C. 265. Să se găsească un număr, mai mic ca o mie, produs a două numere prime și astfel că dacă micșorăm prima și ultima lui cifră cu o unitate obținem un număr cu cifre identice.

O. N. Ț.

T. C. 266. Să se găsească patratele mai mici ca 10^6, astfel că, dacă schimbăm prima și ultima cifră între ele să obținem tot patrat, dacă adunăm cifrele să obținem un patrat, iar dacă scădem cifra de mijloc din suma cifrelor extreme (dela capete) să obținem de asemenea un patrat.

O. N. Ț.

T. C. 267. Să se găsească numerele, multipli de *99,* care împărţite cu divizorii *11, 13, 17, 19* dau respectiv resturile

$$+1\ ,\ +2\ ,\ +3\ ,\ +4.$$

O. N. Ţ.

T. C. 268. Să se găsească numerele mai mici ca 10^9, multipli de *111,* care împărţite la divizorii *17* şi *19* să dea respectiv resturile *7* şi *9.*

O. N. Ţ.

ERATĂ. La soluţia exerciţiului V. 532, pag. 77, Vol. VI. Soluţiile sistemului format de (1), (2) şi (3) sunt:

$$a = \frac{17}{4}\ ;\quad b = \frac{5}{4}\ ;\quad c = -\frac{13}{2}$$

iar polinomul cerut:

$$P(x) \equiv x^5 + \frac{21}{4}x^4 + \frac{21}{2}x^3 + 16x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{61}{2}.$$

G. D. S.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuș, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se vor scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . { pentru particulari . . . Lei 200 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ. — C. 59.898

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 6 1 MARTIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALA „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 6 1 MARTIE 1940

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

Societatea *Gazeta Matematică* având în vedere legea pentru funcţionarea învăţământului secundar teoretic publicată în Monitorul Oficial No. 256 din 4 Noemvrie 1939 a rugat Ministerul Educaţiunii Naţionale să autorize ţinerea concursului în condiţiunile în care s'a ţinut în fiecare an, până în prezent.

Ministerul Educaţiunii Naţionale, Direcţiunea Invăţământului Secundar prin adresa No. 19.164/940 B. din 13 Februarie 1940 ne-a dat următorul răspuns:

Ca răspuns la adresa Dvs. No. 140/940, avem onoare a vă face cunoscut că, conform legii, nimeni nu poate face concursuri cu elevii decât Ministerul Educaţiunii Naţionale. „Gazeta Matematică" va trebui deci să ceară în mod special delegaţie dela Minister pentru a putea organiza concursurile în acest an.

Ministerul va numi o comisiune pentru concurs care trebue să se ţină în condiţiuni stabilite de Minister.

Director,
(ss) **I. BRATU**

Şeful Serviciului,
(ss) **DEM. TEODORESCU**

Ca urmare Societatea *Gazeta Matematică* în şedinţa dela 22 Februarie 1940 a hotărît ca în anul acesta concursul *Gazetei Matematice* să nu se mai ţină.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

EXERCIȚII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 463.* Triunghiurile MAB și MCD sunt asemenea deci

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5} \therefore \frac{AB}{CD - AB} = \frac{2}{3} \therefore \frac{AB}{6} = \frac{2}{3} \therefore AB = 4$$

deci CD = 10. Prin teorema lui PITAGORA găsim

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{EC}^2 = 100 - 36 = 46 \therefore \overline{BE} = 8$$

$$S = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{BE} = 56 \text{ cm}^2.$$

E. M.

IV. 468. Latura $\overline{EA}$ este mai mare ca $\overline{AC}$; ca $\overline{EC}$, deci ca $\overline{IC}$ și $\overline{IE}$.

Avem succesiv:

$$\overline{EA}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{EC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OE}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{EI}^2 - \overline{OI}^2$$
$$= \overline{CA}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{EI}^2.$$

c. c. T. D.
O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 548.* Din asemănarea triunghiurilor ADC și ACB rezultă:

1^0. $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB$ și 2^0. $\frac{AD}{AC} = \frac{DC}{CB} = \frac{AC}{AB}$.

Ținând seama de 1^0, avem în triunghiul ABD,

$$\frac{OD}{OB} = \frac{AD}{AB}. \qquad (1)$$

Din 2^0 rezultă

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AD}.$$

Primul și al doilea raport ridicate la patrat ne dau:

$$\frac{\overline{DC}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB} \times \overline{AD}} = \frac{AD}{AB}. \qquad (2)$$

Comparând (1) cu (2) rezultă:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{\overline{DC}^2}{\overline{CB}^2}.$$

q. e. d.
G. D. S.

V. 549. Fie M punctul dat în planul cercului O; cu razele

$$\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \; ; \; \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} \; ; \; \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$$

(evident a, b, $c < 2R$) descriem cercurile concentrice cu cercul O, anume (O_a), (O_b), (O_c). Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca punctul M să fie exterior cel puţin unuia din cercurile O_a, O_b, O_c. Să presupunem, de exemplu, că M este exterior cercului O_a. In acest caz, în cercul O şi trecând prin M pot fi duse două coarde de lungime a, acelea date de tangentele la cercul O_a duse din punctul M. Fie AD poziţia uneia din ele. Prin A şi D ducem două drepte AX şi DY care formează cu AD şi DA respectiv unghiuri de 60°. Acum ducând la cercurile O_b şi O_c tangente paralele cu AX şi DY obţinem toate triunghiurile echilaterale care corespund coardei considerate $\overline{AD}$; etc.

O. N. Ţ.

V. 550. Fie cercul O şi o lungime dadă l, evident mai mică ca diametrul cercului O. In cercul O luăm o coardă $\overline{AB}$ egală cu l şi ducem apotema $\overline{OI}$ a coardei AB; apoi prin A şi B coardele BE, AD astfel ca:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle EBA = 60^0$$

şi construim asemenea cercul concentric cu O de rază OI, iar în acest cerc triunghiul echilateral înscris IKL, având un vârf în I. Ducem tangentele în K şi L la cercul IKL şi avem astfel coardele $\overline{CD}$ şi $\overline{EF}$ în cercul O egal cu $\overline{AB}$ şi formând cu ea un triunghiu echilateral. (Se ajunge la această soluţie presupunând problema

rezolvată). Raportul de asemănare a două poligoane regulate este egal cu raportul apotemelor, sau al razelor lor. Apotema triunghiului MNP, format de coardele egale, este

$$\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}},$$

iar a triunghiului echilateral înscris în cercul O egală cu $\frac{R}{2}$; deci raportul de asemănare cerut este egal cu:

$$\sqrt{4R^2 - l^2}.$$

In cazul când $l = R\sqrt{3}$, triunghiul MNP este chiar triunghiul echilateral înscris în cercul O. *Alte proprietăți.* Triunghiul MNP este triunghiul echilateral circumscris cercului

$$IKL \quad \therefore \quad \overline{MA} = \overline{MF} = \overline{NB} = \overline{NC} \quad \overline{PE} = \overline{PD}.$$

Apoi de aci:

$AF \parallel CD$; $CB \parallel EF$; $ED \parallel AB$ şi $AD \parallel EF$; $BE \parallel CD$; $CF \parallel AB$;

apoi $\overline{AF} = \overline{CB} = \overline{ED}$ şi $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ etc.

O. N. Ţ.

V. 551. Relaţia de condiţie devine $bc = ab + ac$, iar membrul întâi al identităţi devine

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + (b + c)^2$$

$$= a^2 + \frac{b^2c^2}{a^2} = \frac{a^4 + b^2c^2}{a^2}.$$

E. M.

Clasa VI-a. *Exerc. 538.* Avem:

$$a^{a^x} \cdot \log a = b^b \log b$$

$$a^x \log a + \log \log a = b \log b + \log \log b$$

$$a^x \log a + b \log b + \log \log b - \log \log a$$

$$x \log a + \log \log a = \log [b \log b + \log \log b - \log \log a]$$

$$x = \frac{\log [b \log b + \log \log b - \log \log a] - \log \log a}{\log a}.$$

In cazul particular dat avem:

$$x = \log [5 \log 5 + \log \log 5] = 0{,}52366.$$

G. D. S.

VI. 540. Cele trei numere sunt:

$$\frac{a}{q} : a : aq : \text{ deci conform enunțului}$$

$$\begin{cases} aq = \dfrac{a^2}{q^2} \\ aq - \dfrac{a}{q} = 12 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} q^3 = a \\ aq - \dfrac{a}{q} = 12 \quad \therefore \quad q^4 - q^2 = 12 = 0 \end{cases}$$

care rezolvată ne dă

$$q = \pm 2 \quad \therefore \quad a = \pm 8$$

$$:: 4 : 8 : 16 \quad \text{şi} \quad :: 4 : -8 : 16.$$

E. M.

VI. 541. Fie $\overset{\frown}{BOC} = \theta$ şi $EOB = \alpha$. Avem din triunghiurile dreptunghiuri formate:

$$\overline{OF} = \overline{OE} \cos\alpha \quad \text{şi} \quad \overline{OH} = \overline{OE} \cos(\theta - \alpha)$$

$$\therefore \quad \overline{OF} : \overline{OH} = \cos\alpha : \cos(\theta - \alpha).$$

Apoi

$$OI = \overline{OH} \cos(\pi - \theta) \quad ; \quad \overline{OG} = \overline{OF} \cos(\pi - \theta)$$

$$\therefore \quad \overline{OI} : \overline{OG} = \overline{OH} : \overline{OF}.$$

Pentru ca GI să fie paralelă cu FH trebue ca să avem:

$$\overline{OI} : \overline{OG} = \overline{OF} : \overline{OH} \quad \therefore \quad \overline{OF} : \overline{OH} = 1,$$

sau încă $\cos\alpha : \cos(\theta - \alpha) = 1$

$$\therefore \quad \cos(\theta - \alpha) - \cos\alpha = 0 \quad \therefore \quad 2 \sin \frac{\theta}{2} \sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$\text{cum } \sin\frac{\theta}{2} \neq 0 \quad \therefore \quad \sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) = 0 \quad \therefore \quad \alpha = \frac{\theta}{2}.$$

O. N. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 465.* Adunând liniile II şi III la I şi III la II avem:

$$(a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3b & 2b & 2b-a \\ b-a & b-a & b-2a \end{vmatrix} = (a+b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b & a & 2b-a \\ a & a & b-2a \end{vmatrix}$$

$$= a(a+b)\begin{vmatrix} a+b & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a \,.\, b \,.\, (a+b).$$

E. M.

Clasa VIII-a. *Exerc. 327. Se dă elipsa*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} - 1 = 0,$$

a cărei excentricitate este e. *Să se afle unghiul* φ *de care trebue să rotim elipsa în jurul axei sale mari, astfel încât proiecţia acestei elipse pe planul din care a fost scoasă să fie o elipsă de excentricitate* $e' = ke$. *Să se discute. Caz particular:*

$$a = 5 \;,\; b = 3 \;,\; k = 1{,}1.$$

V. Gh.

Fie (E) elipsa dată şi (E') proiecţia ei. (E') are elementele următoare:

$$a' = a \;,\; b' = b\cos\varphi \;,\; c' = \sqrt{a^2 - b^2\cos^2\varphi} \;,\; e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2\cos^2\varphi}}{a}.$$

Relaţia dată ne procură ecuaţia următoare:

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2\cos^2\varphi}}{a} = k\,\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

care rezolvată ne dă:

$$\cos\varphi = \pm\,\frac{\sqrt{a^2(1-k^2) + b^2k^2}}{b}.$$

Discuţiune. Având $e > 0$, $e' > 0$ trebue să avem şi $k > 0$.

$\sqrt{a^2 - b^2\cos^2\varphi}$ este real deoarece $\cos^2\varphi \leqslant 1$.

Trebue să avem:

$$a^2(1 - k^2) + b^2k^2 \geqslant 0$$

ceea ce impune

$$k \leqslant \frac{a}{\sqrt{a_2 - b^2}} = \frac{a}{c}.$$

Mai trebue să avem

$$\sqrt{a^2(1 - k^2) + b^2k^2} \leqslant b$$

deoarece $|\cos\varphi| \leqslant 1$.

Rezultă de aci $k \geqslant 1$.

Intervalul de variaţie al lui k este deci $\left(1, \frac{a}{c}\right)$.

Valorile extreme $k = 1$ şi $k = \frac{a}{c}$ dau respectiv:

$\cos\varphi = \pm 1$, $\varphi = n\pi$, $(E') \equiv (E)$

şi $\cos\varphi = 0$, $\varphi = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $(E') \equiv \overline{A'A}$.

Caz particular. Inlocuind în (1) valorile date şi efectuând calculele găsim:

$$\cos\varphi = \pm \frac{\sqrt{5{,}64}}{3}$$

$$\varphi = n \times 180^0 \pm 37^0 39' 42''.$$

VIII. 349. Luăm pe BC ca axă Ox, iar perpendiculara pe mijlocul lui BC, Oy. Fie $A(-a, o)$, $B(a, o)$ şi

$$(AC) = y = m(x + a) \quad ; \quad (BC) = y = m'(x - a).$$

Cum $A + H = 180^0 : 4A = 180^0$ deci $A = 45^0$ şi $H = 135^0$. Trebue ca

$$\frac{m - m'}{1 + mm'} = 1.$$

Eliminând pe m şi m' între AC, BC şi această relaţie găsim locul

$$x^2 + y^2 + 2ay - a^2 = 0.$$

Eliminând între BH, CH şi relaţia:

$$\frac{-\frac{1}{m'} + \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m \cdot m'}} = -1$$ găsim locul ortocentrului.

E. M.

Până la 5 Februarie s'au primit soluţii bune pentru exerciţiile publicate în n-rul 2, 3, 4 şi 5 anul VI, dela[1]):

Liceul „Carmen-Sylva" Bucureşti.

Clasa III-a: Agapie Paula (III: 105, 9, 13, 4), Ispas Leonora (III: 112).
Clasa V-a: Mihăilescu Ileana (V: 531).
Clasa VI-a: Vasilescu Alexandra (VI: 552).
Clasa VII-a: Crasoveanu Lucia (VII: 472), Vasiliu Margareta (VII: 449, 55, 64, 72).
Clasa VIII-a: Constantinescu Paula (VIII: 353*).

Şcoala Centrală de fete Bucureşti.

Clasa IV-a: Braslă Eliza (IV: 471, 3), Duţă Silvia (IV: 471, 3), Ionescu Alice (IV: 471, 3), Motaş Rodica (IV: 471, 3), Niculescu Sanda (IV: 477, 8), Popescu Niculina (IV: 471), Posdărescu Ligia (IV: 471), Teodorescu C. Maria (IV: 465*, 6, 73).
Clasa V-a: Meran N. Eliza (V: 531).
Clasa VI-a: Agapie Gh. Elena (VI: 543).
Clasa VII-a: Dimoftache Corina (VII: 466, 72), Dinu D Elena (VII: 472), Halunga Speranţa (VII: 453), Parker I. (VII: 459), Rădulescu Ecaterina (VII: 453, 72), Savelică Maria (VII: 461).

Liceul „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa IV-a: Petrescu C. Lidia (IV: 460, 4, 5, 71).
Clasa V-a: Pollak Liliana (V: 555).
Clasa VII-a: Goldenberg Ada (VII: 459, 60, 2, 6).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Liceul de fete „Aurel Vlaicu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Dan Maria (IV: 465, 6, 71).

Liceul „Iulia Hajdău“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Stoica Silvia (VI: 535, 40).

Liceul „Sancta Maria“ Brăila.

Clasa IV-a: Dimitriu I. Ionela (IV: 457, 8, 60*, 1*, 2).

Liceul „Oltea Doamna“ Iaşi.

Clasa IV-a: Bogza I. Despina (IV: 466, 71), Lăbuşcă N. Elena (IV: 457, 8, 65, 6, 72).

Clasa V-a: Zissu M. Francisca (V: 537).

Liceul „Notre Dame de Sion“ Iaşi.

Clasa IV-a: Blimes Fernanda (IV: 472), Con Lidia (IV: 457), Copal I. Estera (IV: 457, 8, 63, 70, 1, 4), Mihăilescu D. Alexandra (IV: 464, 5, 71).

Clasa V-a: Rohr Lidia (V: 537, 44).

Liceul de fete Râmnicu-Vâlcea.

Clasa VII-a: Jurcan G. Sofia (VII: 449, 64, 6, 70, 1).

Liceul „Carmen-Sylva“ Timişoara.

Clasa IV-a: Roşu Glicheria (IV: 464, 6).

Clasa VI-a: Bakonyi Maria (531, 4, 5, 8).

Clasa VII-a: Gall E. Lilli (VII: 449, 62, 3, 8, 9, 70, 1, 6), Ionescu Lucia (VII: 449, 68, 9, 70, 1, 2), Leibovici H. Ana (VII: 454, 66), Mardan Agir (VII: 465, 6, 9, 71, 6), Pleşa Ileana (VII: 455, 7, 62, 3), Severineanu Maria (VII: 449, 50, 2, 6*).

Clasa VIII-a: Adler Edith (VIII: 354, 8, 60), Checianu Ana (VIII: 342*, 4, 54, 8, 9, 60, 70*), Domonkos Erika (VIII: 353, 4, 8, 9, 60), Szlahotka Margareta (VIII: 340).

Gimnaziul de fete Timişoara.

Clasa IV-a: Nagy Elena (IV: 457, 67).

Liceul „Aurel Vlaicu“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Mănescu I. (VI: 537).

Clasa VII-a: Barbaianu I. (VII: 449, 50, 3, 4, VIII: 340, T. c.: 246), Buga M. (VII: 453).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa V-a: Bardescu T. A. (V: 537), Davidescu Gh. (V: 555), Gagel C. (V: 531), Leoveanu M. (V: 537, 44).

Clasa VI-a: Ionescu C. (VI: 527, 38, 40).

Clasa VII-a: Andronie Gh. (VII: 449, 61, 9, 70), Cociaşu S. (VII: 447), Frigator M. (VII: 465, 6, 8, 71), Fundăţeanu M. (VII: 469, 70, 2, 8, 80), Ganea N. (VII: 452, 3), Haimovici G. (VII: 465, 8, 9, 70, 1), Kraus R. (VII: 465, 8, 9, 70, 1), Moscovici N. (VII: 449, 53, 65, 8, 71), Popa V. (VII: 447, 53, 9, 64, 6, 71), Popescu C. C. (VII: 405, 64, 8, 71), Stănculescu E. (VII: 453), Theodoroff I. (VII: 449, 72, VIII: 370).

Clasa VIII-a: Theodoroff S. (VIII: 360, 4).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa III-a: Ieşan St. A. (III: 98, 106, 7, 11*, 3, 4).

Clasa IV-a: Angelescu G. F. (IV: 465), Grigorescu P. R. (IV: 465), Poplien S. (IV: 462, 9, 70), Stânga M. V. (IV: 465, V: 555), Antonescu D. E. (IV: 474, 81).

Clasa V-a: Belizarie E. (V: 531), Benjamin S. (V: 544), Buescu R. (V: 531, 52), Covrigeanu R. (V: 555), Ghelber A. (V: 537, 65), Marcovici I. (V: 531, 55, 60), Saicovici E. (V: 547, 55, 8, 60), Satinover L. (V: 555), Sternberg E. (V: 544, 55).

Clasa VI-a: Vasiliev B. (VI: 527, 40).

Liceul „M. Eminescu" Bucureşti.

Clasa IV-a: Brateş L. (IV: 469), Florescu G. G. (IV: 471, 3), Haber (IV: 467), Pascal I. M. (IV: 461, 3, 4, 5, 6), Şarf C. (IV: 466, 7).

Clasa V-a: Aron Gh. (V: 531, 47).

Clasa VIII-a: Leibovici S. (VIII: 353*, 7, 8, 60, 2, 70), Marinescu I. (VIII: 353*), Mateescu A. (VIII: 357), Savovici T. (VIII: 353*).

Liceul „Mihaiu Viteazul" Bucureşti.

Clasa VI-a: Predoleanu N. (VI: 531, 2, 4, 6, 8*, 47), Trestianu S. (VI: 539).

Clasa VII-a: Beno M. (VII: 465, 8, 9, 70, 1, 2, 5, 6, VIII: 246*). Ştefănescu D. (V: 449).

Clasa VIII-a: Brezeanu C. (VIII: 351*).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a: Anton C. (IV: 457), Bâlcu N. (IV: 457, 8, 61), Colorian R. A. (IV: 463, 5, 9, 70, 1), Dimos H. F. (IV: 467, V: 538, 52, 6), Dumitrescu D. (IV: 455, 64, 77, 80, V: 567), Gerota S. (IV: 460, 1, 2, 3, 4, 5, 74, V: 537), Ionescu D. (IV: 455), Kogâlniceanu I. (IV: 466), Mişicu M. (IV: 455, 469, 73), Nicolau G. G. (IV: 455, 71, 3, 4, V: 546, 7).

Clasa V-a: Stoica V. (V: 555).

Clasa VII-a: Ciurescu F. (VII: 460, 4*, 72), Gheorghiadi G. (VII: 449, 59, 60, 6), Marinescu P. (VII: 453), Mihăileanu A. (VII: 449, 54). Peternelli P. (VII: 449, 65, 8, 9, 70, 1).

Clasa VIII-a: Gârneţiu J. (VIII: 357, 8, 60).

Liceul „Gh. Şincai" Bucureşti.

Clasa V-a: Constantinescu E. (V: 527, 37, 8*, 44), Pascu M. C. (V: 527, 37, 8*, 44).

Clasa VI-a: Iosipescu I. (VI: 527, 40).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa V-a: Teodorescu A. (V: 531, 47, 55, 7).

Clasa VI-a: Löbel M. (VI: 534), Popescu-Necşeşti A. (VI: 529, 40).

Clasa VII-a: Alexandru M. (VII: 459, 61, 6), Blanc E. (VII: 459, 66, 8, 71, 2), Ghitnic R. (VII: 459, 66, 72), Kohnfeld E. (VII: 459, 60, 6), Lupolover L. (VII: 453, 60), Moscovici N. (VII: 459, 72).

Clasa VIII-a: Grigoriu A. D. (VIII: 346, 60*), Guralivu E. (VIII: 340, 1, 2, 4, 5, 6), Racoviceanu V. (VIII: 340*, 2, 4, 6, T. c.: 246), Şeibulescu C. (VIII: 351*).

Liceul „T. Maiorescu" Bucureşti.

Clasa IV-a: Albulescu V. (IV: 477), Orezeanu D. (IV: 460, 4, 5, 73).

Clasa V-a: Slăvescu M. (V: 531, 6, 7, 8, 44).

Clasa VII-a: Niculescu M. (VII: 463, VIII: 347*), Tănăsescu M. (VII: 452, 3, 5).

Clasa VIII-a: Şerbănescu V. (VIII: 344), Weiss M. (VIII: 354, 9).

Liceul „Sft. Andrei" Bucureşti.

Clasa VI-a: Ganea M. (VI: 537).

Clasa VII-a: Constantinescu D. (VII: 454), Filiti G. (VII: 449, 62, 8), Haid I. (VII: 466, 8, 71, 2, 3, 5, 6), Juster M. (VII: 465, 8, 9, 71, 2, 5), Mihoci N. (VII: 461*, 9, 70, 1, 2, 5), Ortenberg E. (VII: 461*, 5, 6, 8, 9, 70, 1), Saranga J. (VII: 452, 3), Şenchi E. (VII: 454, 61, 72), Ştefanovici I. M. (VII: 469, 72, 6, T. c.: 252).

Liceul „Schewitz Thierrin" Bucureşti.

Clasa VII-a: Mărgărit I. N. (VII: 449, 59, 60, 6, 7, 9, 70, 2, 5, 7).

Liceul „C. Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa VI-a: Nadolu Gr. (VI: 527).

Liceul „Profesorii Asociați" București.

Clasa V-a: Kladni A. (VI: 527).

Liceul „Moise Nicoară" Arad.

Clasa V-a: Nistor I. (V: 538*, 9, 52, 4, 5).
Clasa VII-a: Gligor I. (VII: 453, 4, 5, 51).

Liceul „Ferdinand I" Bacău.

Clasa III-a: Edelstein M. (III: 106, 9, 12, 3, 4).
Clasa V-a: Iosipescu P. (V: 539).
Clasa VII-a: Dalban C. (VII: 466, 7, 75), Iliescu A. (VII: 453).

Liceul „Codreanu" Bârlad.

Clasa VII-a: Atanasiu A. (VII: 468, 70).

Liceul „Sft. Vasile" Blaj.

Clasa III-a: Ordace C. (III: 100, 3*, 9), Măcovei S. (III: 101, 14).
Clasa IV-a: Avram N. I. (IV: 465, 73), Balea I. (IV: 473).
Clasa VII-a: Mateescu Luca (VII: 463).

Liceul „Laurian" Botoșani.

Clasa VI-a: Toma G. (VI: 538, 40).
Clasa VII-a: Merovici B. (VII: 453), Munteanu F. (VII: 468, 9, 70, 1, 5).

Liceul „Avram Iancu" Brad.

Clasa V-a: Dan I. (V: 551, 4).

Liceul „N. Bălcescu" Brăila.

Clasa VII-a; Bălănescu V. (VII: 464, 8, 71, 2), Chirculescu I. (VII: 459, 60, 3, 4, 6).
Clasa VIII-a: Trefilov M. (VIII: 340*, 6, 53*, 4*, 7, 8*, 60).

Liceul particular Brăila

Clasa VII-a: Cotariu M. (VII: 454).

Liceul „Meșota" Brașov.

Clasa III-a: Dumitrescu G. (III: 106).
Clasa IV-a: Dumitrașcu O. (IV: 469*, 70), Iordan I. (IV: 471), Pipa N. (IV: 461, 5, 9).
Clasa V-a: Georgescu M. (V: 537), Negrea D. (V: 552, 55).
Clasa VIII-a: Rosenzweig M. (VIII: 360), Țenescu C. S. (VIII: 346, 60).

Liceul Internat „Buftea".

Clasa IV-a: Alexandri I. A. (IV: 465), Burghele N. N. (IV: 464, 5, 9), Niţu G. (IV: 464), Tănăsescu M. (IV: 465, 9).

Clasa VI-a: Bănică G. (VI: 527, 35), Costică M. (VI: 527, 35).

Clasa VII-a: Popescu P. (VII: 466, 9).

Clasa VIII-a: Cernescu G. (VIII: 340, 60, T. c.: 249, 51, 358, Constantinescu Al. (VIII: 340, 1, 58, 60), Petrescu D. (VIII: 358), Simion S. (VIII: 340, 1, 58).

Liceul „Ştirbey Vodă" Călăraşi.

Clasa VII-a: Borduşeanu P. (VII: 459, 66, 8, 9), Iancu Gh. (VII: 472), Ionescu N. V. (VII: 472), Mateescu L. (VII: 462, 6), Mihalca M. (VII: 453, 72, Rădulescu M. (VII: 460, 4, 5, 8, 9, 70, 1, 2, 5, T. c.: 246).

Liceul „B. Ştirbey" Câmpina

Clasa IV-a: Beloiu N. C. (IV: 465, VI: 528), Cernat M. (IV: 457*, 65), Cotea G. (IV: 457), Fava G. (IV: 457).

Clasa VI-a: Cernat I. (VI: 527), Heller H. (VI: 527).

Clasa VIII-a: Lăzăroiu P. (T. c.: 246), Mihăilescu C. (T. c.: 246).

Liceul „I. Assan" Caracal.

Clasa III-a: Florescu I. I. (III: 100).

Clasa VI-a: Musceleanu V. (VI: 464, 527*, 34, 40).

Clasa VII-a: Gligor I. D. (VII: 449), Gongu N. (VII: 449).

Liceul „Aron Pumnul" Cernăuţi.

Clasa IV-a: Timotin A. (IV: 460, 1, 3, 4, 5, 6, V: 538*).

Clasa V-a; Rieber W. (V: 537, 44, 51, 2, 3, 4, 5).

Clasa VIII-a: Iliescu G. R. (VIII: 337).

Liceul militar Cernăuţi.

Clasa III-a: Marin A. (III: 100), Dilschi C. (III: 114), Iana V. (III: 114), Sinţescu M. (III: 113, 4).

Clasa IV-a: Candea S. (IV: 474), Căpriţă I. (IV: 464, 6, 73, 4), Cortuşan J. (IV: 474, 5, 6), Dimitrescu I. (IV: 473, 4, 5, 6), Huţul C. (IV: 471, 3, 4), Mihăiţă D. (IV: 464, 6, 9, 73, 4, 5), Nicolaescu I. (IV: 463, 4, 6, 74, V: 537, 55), Popescu G. (IV: 474), Popescu N. (IV: 466, 74), Ranga C. (IV: 462*, 4, 6, 9, 73, 4, 5, 6, V: 546, 55), Rizescu O. (IV: 466, 74), Staicu C. (IV: 458, 63, 4, 6, 9, 74, V: 546, 55), Ţăranu S. (IV: 474), Vasiliu D. (IV: 463, 4, 6, 9, 73, 4, V: 546, 55).

Clasa V-a: Alexandrescu R. (VI: 527), Barbuceanu G. (V: 537), Catrinescu N. (V: 552), Iana I. (V: 552), Pleşa L. (V: 527, 55), Polexe I. (V: 537), Stănescu C. (V: 522, 54), Trifon V. (V: 552, 4).

Clasa VI-a: Adam N. (VI: 527), Bojin D. (VI: 527, 32), Caulea I. (VI: 545, 7), Cazaciuc D. (VI: 527), Diaconescu V. C. (VI: 527, 47), Florea C. (VI: 527), Gheorghiu M. (VI: 532), Grigorescu N. (VI: 527), Horia I. (VI: 527), Irimescu P. (VI: 532, 4, 8), Jipa N. (VI: 527), Mqrcean N. (VI: 527), Morariu L. (VI: 527), Munteanu S. (VI: 527), Nedelea I. (VI: 527, 47), Neuhert R. (VI: 527), Offner K. (VI: 527), Slătinescu C. (VI: 527), Topârceanu G. (VI: 532, 4), Vâlceanu A. (VI: 527), Vişan T. (VI: 532, 4), Zavati C. (VI: 527).

Clasa VII-a: Moldoveanu N. D. (VII: 464).

Clasa VIII-a: Alexandru D. V. (VIII: 360), Arabu I. (VIII: 343, 4, 57), Cârdei G. (VIII: 357, 8, 60), Dovgan G. (VIII: 357, 8, 60), Fulgeanu I. (VIII: 358, 60), Găleată P. (VIII: 360), Gviazdomorschi R. (VIII: 347, 57), Iliescu R. (VIII: 360), Lungulescu V. (VIII: 357), Majeanu F. N. (VIII: 354), Moisii G. I. (VIII: 358, 60), Paicu M. (VIII: 358, 60), Pârvu N. A. (VIII: 360), Pletea M. (VIII: 344, 57, 8, 60), Rollea C. V. (VIII: 357, 8. 60), Scurtu D. I. (VIII: 357, 60), Stamate I. (VIII: 357, 60). Streja S. (VIII: 357), Tacu G. P. (VIII: 358), Tofan M. (VIII: 357, 8. 60), Ţocu G. P. (VIII: 360).

Liceul „Mitropolitul Silvestru" Cernăuţi.

Clasa VI-a: Neagu I. (VI: 540).

Liceul militar Chişinău.

Clasa IV-a: Grigoriu M. (IV: 457, 62, 3, 4, 6).

Clasa VI-a: Cristea C. (VI: 461, 6, 540), Pacioglu C. (VI: 527, 30, 4).

Clasa VII-a: Preotu P. (VII: 453).

Liceul „Gh. Barițiu" Cluj.

Clasa IV-a: Donculescu E. (IV: 465).

Clasa VI-a: Cap de bou F. (VI: 468, 71, 547).

Clasa VII-a: German E. (VII: 453, 4, 62, 8, 9, 71), Gheorghieş R. (VII: 468, 9, 70, 1, 2, 8, 80*), Nasta L. (VII: 453, 62, 6, 72, 5), Oancea I. I. (VII 449).

Clasa VIII-a: Demetru I. (VIII: 340, 54).

Liceul de aplicaţie al Şcoalei Normale Superioare Cluj.

Clasa VII-a: Botha L. (VII: 453, 5), Gheorghieş R. (VII: 461), Harmieru P. (VII: 466), Petre V. (VII: 453, 5, 64, 5, 8, 70, 1).

Liceul „Fraţii Buzeşti" Craiova.

Clasa IV-a: Marian D. (IV: 459).

Clasa VI-a: Amărăşteanu S. (VI: 527).

Clasa VII-a: Ionescu T. (VII: 540).

Clasa VIII-a: Marian I. (VIII: 340, 2, 4, 6).

Colegiul Național „Carol I" Craiova.

Clasa VII-a: Drăguşin A. (VII: 453, 66, 72).

Liceul militar Craiova.

Clasa IV-a: Cioroianu C. (IV: 455), Nicolaescu N. (IV: 455).

Clasa V-a: Anchescu M. (V: 552, 5), Bădescu F. (V: 544), 6, 55). Băldescu V. (V: 535, 55), Bogdănescu N. (V: 552), Botezatu T. (V: 555), Coşereanu I. C. (V: 535, 52, 5), Dascălu S. (V: 535, 52), Dinculescu N. (V: 531, 44, 52, 5), Dogaru M. (V: 546), Duduţă T. (V: 555), Encuţescu A. (V: 555), Ghinea M. (V: 552), Iacobescu I. (V: 555), Ionaşcu F. (V: 544, 55), Marincu I. (V: 556), Mereş E. (V: 531), Mihail G. (VI: 535), Oprescu M. (V: 555), Păsăriçă V. (V: 535, 52, 5), Polizu A. (V: 531), Preda V. (V: 555), Pretorian M. (V: 552, 4, 5, VII: 460), Procopie V. (V: 552, 5), Rădulescu I. (V: 531, 52), Rădulescu H. I. (V: 555), Sberghe M. (V: 552), Vilaia G. (V: 546, 55), Zamfir M. (V: 531).

Clasa VI-a: Băcanu C. (VI: 535, 49), Cercel V. (VI: 540), Cioc M. (VI: 531), Cioroianu M. C. (VI: 536), Danieleanu G. (VI: 549, VII: 452) Diaconu A. (VI: 531, 5, VII: 452), Diaconu M. I. (VI: 535), Dobrescu P, (VI: 531, 5), Dunăreanu O. (VI: 531, 5, 49), Gurău T. (VI: 531, 49), Jurcu S. (VI: 549), Minciunescu D. (VI: 535), Morait I. R. (VI: 535), Negruş D. (VI: 536), Pârvan I. (VI: 536), Popa E. (VI: 535, 40), Popescu G. (VI: 535, 40), Poşoi D. (VI: 531), Popescu D. V. (VI: 531), Savin R. (VI: 527, 35, 40, VII: 452), Tomescu S. C. (VI: 531. 49), Teodorescu V. (VI: 527, 35, 49), Tuţă I. (VI: 531, 49, VII: 452), Vlăsceanu I. (VI: 535), Zaharia S. (VI: 531, 49, VII: 452).

Clasa VII-a: Glogojanu M. (VII: 453, 9, 66).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa VIII-a: Baruch M. (VIII: 354, 7, 60, 70), Nicoară T. (VIII: 353, 4*, 7, 64, 6, 70).

Liceul „Radu Negru" Făgăraş.

Clasa V-a: Vişan O. (V: 537).

Liceul „V. Alecsandri" Galaţi.

Clasa VII-a: Abeles F. (VII: 465, 8, 9, 70, 1, 2).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa IV-a: Marinescu I. (IV: 465, 71).
Clasa V-a: Nedelescu V. Gh. (V: 536).
Clasa VII-a; Petrescu G. (VII: 455, 61*, 2, 4, 8, 72, 80, VIII: 349),
Clasa VIII-a: Chertman M. (VIII: 354, 8*).

Liceul „Național" Iași.

Clasa III-a: Silvian S. (III: 104, 13).

Clasa VII-a: Strochin A. (VII: 447, 9), Mattes L. (VII: 472, 5), Roitman I. (VII: 472), Secu E. (VII: 449).

Liceul Internat „C. Negruzzi" Iași.

Clasa VI-a: Cerbureanu P. (VI: 535, VII: 471, 532, T. c.: 252), Manolache T. (VI: 532), Manoliu V. (VI: 534, 5), Mircea G. (VI: 532), Rabinschi N. (VI: 532, 4, T. c.: 252), Stihi P. (VI; 532, 4).

Clasa VII-a: Berechet M. (VII: 464, 5, 6, 8, 9, 70, 1, 2), Costinescu A. (VII: 449).

Liceul de Aplicație Iași.

Clasa VIII-a: Weis M (VIII: 360).

Liceul militar Iași.

Clasa IV-a: Andrei A. (IV: 474, V: 555), Busuioceanu C. (IV: 474), Turculeț T. (IV: 469, 73, 4, V: 555).

Clasa V-a: Nicolau T. (V: 593).

Clasa VII-a: Atanasiu V. (VII: 466), Bârzu V. (VII: 472, 5, 6).

Clasa VIII-a: Iliescu R. (VIII: 354), Jiletcovici A. (VIII: 350*, 4), Păşcanu C. (VIII: 350*, 4*).

Liceul „Petru Rareș" Piatra-Neamț.

Clasa VII-a: Marcovici A. (VII: 468, 70, 1, 2, 6), Schapira S. (VII: 449, 55).

Clasa VIII-a: Sorogeanu D. (VIII: 366), Stocker P. (VIII: 340, 4).

Liceul „I. C. Brătianu" Pitești.

Clasa V-a: Popescu M. (V: 532, 4, 5, 6, 41, 6, 7, 51, 2, 5, VII: 465, 8, 9, 70, 1, T. c.: 246), Tologea S. (V: 459, 61, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 70, 1, 2, 5).

Liceul „Sf. Petru și Pavel" Ploești.

Clasa IV-a: Jupcianu N. (IV: 454, 9, 61*, 3, 4, 5, 6, 71, 4*), Vintilescu G. (IV: 454, 5, 7, 8).

Clasa V-a: Cătuneanu T. (VI: 527), Vernescu M. (V: 552, 5, 6, 60, 5), Weitzman I. (V: 536, 7, 46, 55, 9, 60, VIII: 453, 7, 65, 8, 9, 70, 1, 2, 5).

Clasa VI-a: Bereanu B. (VI: 435*, 65, 8, 9, 70, 1, 538, VII: 453, T. c.: 246).

Liceul militar Mânăstirea Dealu.

Clasa III-a: Ghiță V. (III: 104, VI: 457).

Clasa IV-a: Iliescu C. (IV: 465).

Clasa V-a: Filipidescu M. (V: 546), Ionescu B. A. (V: 333, VI: 536), Petrescu St. (V: 546, VII: 470), Stoianovici Ş. (V: 545, 55, 9, VII: 468, 70, 1), Vieceli A. (VII: 453).

Clasa VI-a: Aldea V. (VI: 461, 4, 6, 531, 6*, 40), Arendt E. (VI: 527*, 34), Hristescu I. I. (VI: 459, 64, 6, 531, 6, 40, VII: 461), Urseanu M. (VI: 459, 66, 531, 6).

Clasa VII-a: Andronescu T. (VII: 468, 9, 70, 1, 2), Bărbulescu P. (VII: 471), Beştoiu N. (VII: 471), Butcă V. (VII: 468, 71), Ceauşelu C. (VII; 468, 9, 70, 1, 2), Chiriţescu M. (VII: 449, 71), Cristescu V. (VII: 471), Dragomir A. (VII: 465, 8, 9, 70, 1), Georgescu Fl. (VII; 449, 71), Ghenglea V. (VII: 471), Lăcătuş V. (VII: 468, 9, 70, 1), Lupoaie F. (VII: 449, 60, 6, 8, 9, 70, 1, 2), Mastero L. (VII: 449, 60, 1, 6, 71), Mândrescu A. (VII: 468, 9, 70, 1), Popescu C. (VII: 449, 50, 60, 4, 6, 71), Predoiu N. (VII: 465, 8, 70, 1, 2), Pruncu N. (VII: 471), Rudeanu L. (VII: 471, 2), Suhăţeanu V. (VII: 449, 66, 8, 9, 71, 2), Şerban C. (VII: 468, 9, 70, 1), Vijelie E. (VII: 465),

Clasa VIII-a: Andrievici N. (VIII: 336, 57, 8, 60*), Staicu N. (VIII: 357, 60), Stoenescu M. (VIII: 354*, 8.

Liceul „Alex. Lahovary" Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VI-a: Mihăescu F. (VI: 527).

Liceul „Principele Nicolae" Sighişoara.

Clasa VII-a: Deac C. (VII: 460, 9, 70, 1, 2), Tănăsescu I. N. (VII: 449).

Clasa VIII-a: Roşală G. (VIII: 351, 3*, 4, 66).

Liceul militar Târgu-Mureş.

Clasa IV-a: Mihalcu I. (IV: 464, 5), Munteanu I. (IV: 540).

Clasa VI-a: Vasilescu V. (VI: 540).

Clasa VII-a: Alexe C. (VII: 449, 51, 60, 4), Costache N. (VII: 449, 52), Costin Al. (VII: 447, 59, 66), Constantinescu M. (VII: 452).

Clasa VIII-a: Bărbieru V. (VIII: 336), Mironescu I. D. (VIII: 344, 5, 6), Topalescu G. (VIII: 344, 5, 6).

Liceul „Papiu Ilarian" Târgu Mureş.

Clasa VIII-a: Ciortea G. (VIII: 344).

Liceul „Diaconovici Loga" Timişoara.

Clasa IV-a: Iacob I. (IV: 460, 6, 74, V: 537, 55), Popa Z. (IV: 457, 60, 3*, 4, 5, 6).

Clasa VI-a: Bubulete Şt. (VI: 527, 34).

Clasa VII-a: Bakonyi C. (VII: 460, 6, 7, 72, 5*), Constantinescu S. (VII: 464), Kinsley I, (VII: 467, 8, 71), Kiss A. (VII: 466), Mannheim A. (VII: 472), Rusu G. (VII: 459, 60, 2, 72).

Liceul „Sf. Haralambie" Turnu-Măgurele.

Clasa V-a: Caragea I. N. (V: 567, 8).

Clasa VIII-a: Stoga D. M. (VIII: 340, 1, 2, 3, 4, 6).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa III-a: Colcovan A. (III: 100, 14).

Clasa IV-a: Dumitrescu T. (IV: 460, 4, 5), Papuc G. G. (IV: 457), Terfeloagă N. (IV: 457, 64).

Clasa V-a: Alexandrescu V. (V: 537, 55, 6*), Roventa C. (V: 537, 55).

Clasa VI-a: Bedreag C. St. (VI: 527. 40), Filip G. G. (VI: 527, 40).

Clasa VIII-a: Bengulescu Al. (VII: 466, 8, 9, 70, 1, 2), Constantinescu S. (VII: 466, 8, 9, 70, 1), Mihail I. G. (VII: 459, 60, 4, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 6), Uidilă I. (VII: 455).

O parte din soluţiile primite nu au fost cercetate şi vor fi anunţate în numărul următor; iar altă parte nu au fost luate în seamă nefiind redactate conform instrucţiunilor anunţate pe coperta fiecărui număr.

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iunie 1940

Clasa III-a. *Exerc. 123.* Un triunghiu ABC are unghiul A de 30^0, $\overline{AB} = \frac{4}{5}$ m şi raza cercului circumscris de $\frac{2}{3}$ m.

Să se calculeze înălţimile.

C. I. B.

III. 124. Se dă un cerc O şi doi diametri perpendiculari $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$. Pe OB luăm un punct M şi ducem $\overline{MN}$ paralel cu CD şi limitat la cercul O. Cercul I construit pe $\overline{MN}$ ca diametru taie cercul O a doua oară în punctul L, iar OL taie a doua oară cercul I în P.

Să se construiască cu rigla şi compasul punctul M astfel ca punctul P corespunzător să fie mijlocul lui $\overline{OL}$. In acest caz, dacă Q este punctul unde ON taie a doua oară cercul I, dreptele PQ şi LN sunt paralele.

Această proprietate din urmă este adevărată pentru orice poziţie a punctului M pe $\overline{AB}$?

O. N. Ţ.

III. 125. Intr'un cerc O de rază R ducem două diametre perpendiculare $\overline{AOC}$ şi $\overline{BOD}$; apoi ducem diametrele A'C' şi B'D' care sunt bisectoarele unghiurilor formate de primele două. Aria comună patratelor ABCD şi A'B'C'D' este aria unui octogon regulat.

Să se calculeze această arie comună în cazul când R = 1 cm, cu o eroare de 0,01 prin lipsă.

O. N. Ţ.

III. 126. Intr'un cerc O ducem doi diametri $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$ perpendiculari unul pe altul. Pe razele OA, OB, OC, OD luăm punctele M, N, P, Q astfel că:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{OM}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\overline{NB}}{\overline{ON}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\overline{PC}}{\overline{OP}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\overline{QD}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{2}.$$

Fie A', B', C', D' punctele de întâlnire ale perechilor de drepte (DM, AN), (AN, BP), (BP, CQ), (CQ, DM).

Să se arate că patrulaterul A'B'C'D' este patrat, iar cercul A'B'C'D' este concentric cu cercul dat.

Presupunând raza cercului O egală cu *1 m*, să se calculeze latura patratului A'B'C'D' şi raza cercului A'B'C'D', cu o greşeală mai mică decât 0,01 m prin lipsă.

Generalizare.

(Faceţi figura mare, cu rigla şi compasul).

O. N. Ţ.

Clasa IV-a [1]). *Exerc. 485.* Să se rezolve sistemul:

$$14(3+3x-2y)+(5+x)(6+y)=0$$

$$\frac{1}{5+x}+\frac{1}{6+y}=\frac{11}{28}.$$

C. I. B.

IV. 486. Să se rezolve ecuația

$$(x+a-b)^2+(x-a+b)^2+8ab=4(a+b)^2.$$

N. M.

IV. 487. Printr'un punct dat A să se ducă o dreaptă Δ, care să întâlnească o dreaptă dată D și să fie perpendiculară pe o altă dreaptă D', deasemeni dată.

G. G. C.

IV. 488. Să se afle valorile numerice ale cantităților a, b, știind că sistemele

$$\left|\begin{array}{l} 2x-3y=a \\ 5x+4y=b \end{array}\right. \quad \text{și} \quad \left|\begin{array}{l} y-4x=7-a-b \\ 7y-8y=2a+b \end{array}\right.$$

au aceleași soluțiuni.

V. GH.

IV. 489. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{1+\frac{x}{2}+\frac{y}{1+\frac{1}{2}}}{2}-\frac{1+\frac{x}{3}+\frac{y}{1+\frac{1}{3}}}{3}=x-y-\frac{5}{6}$$

$$\frac{\frac{x}{2}-\left(\frac{y}{3}-\frac{x+y}{5}\right)}{4}-\frac{\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{x-y}{5}}{3}=\frac{x}{4}+\frac{y}{3}-\frac{23}{36}.$$

G. D. S.

---

1) La exercițiul *IV. 481* din numărul precedent în ultimul rând în loc de „*mai mult*“ se va pune „*mai puțin*“.

IV. 490. Se dă un plan P şi un punct A exterior planului P. Prin A trece o dreaptă AB înţepând planul P în B şi făcând cu el un unghiu de 45°. Fie $\overline{AO}$ perpendiculara din A pe planul P şi BC bisectoarea unghiului ABO, care întâlneşte pe AO în C. Cercul de centru A şi de rază $\overline{AC}$, în planul BAC taie pe AB în D. Fie E proiecţia lui D pe planul P. Să se arate că:

$$BE = \overline{AD}.$$

O. N. Ţ.

IV. 491. Se dă un plan P şi două puncte A şi B în acest plan. Prin A şi B trec două drepte AD şi BE făcând respectiv cu planul P unghiuri de 30° şi 60°. Să se arate:

1°. Că sunt nenumărate drepte paralele cu planul P şi sprijinindu-se pe cele două drepte AD, BE.

2°. Că oricare ar fi dreapta MN (M pe AD şi N pe BE) din aceste paralele, raportul segmentelor AM şi BN este constant.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 571.* Să se construiască un triunghiu dreptunghiu BAC cunoscându-se poziţia vârfului B, a punctelor M şi N de pe catetele BA şi CA, unghiul ascuţit B.

V. Gh.

V. 572. Bisectoarele unghiurilor subt care se taie două cercuri se întâlnesc într'un punct pe dreapta centrelor şi care împarte distanţa centrelor în părţi proporţionale cu razele.

V. Gh.

V. 573. Se dau două cercuri concentrice. Să se arate că raportul, dintre aria coroanei cuprinsă între ele şi aria patratului ce ar avea ca latură coarda cercului mare tangentă celui mic, este constant.

C. I. B.

V. 574. Fie M_1, M_2 două puncte fixe, iar M variabil, pe acelaşi cerc; O un punct arbitrar, dar fix, în plan. Să se arate că:

$$\sphericalangle OM_1M - \sphericalangle OM_2M = \text{constant} = \sphericalangle M_2MM_1 - \sphericalangle M_1OM_2.$$

N. M.

V. 575. Intr'un patrulater ortodiagonal ABCD notăm cu P, Q, R, S mijloacele laturilor şi cu M intersecţia mediatoarelor diagonalelor.

1°. Să se demonstreze că avem relaţia:

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2 + \overline{MS}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2.$$

2°. Dacă patrulaterul este şi inscriptibil să se arate că suma patratelor laturilor este egală cu de patru ori aria *patratului* înscris.

G. D. S.

V. 576. Se consideră ecuaţia reciprocă

$$f(x) \equiv x^4 + 4ax^3 + (4a^2 - 2)\,x^2 + 4ax + 1 = 0$$

şi se cere:

1°. Să se arate că există un h real astfel încât punând $x = y + h$, să obţinem o ecuaţie bipătrată în y.

2°. Să se rezolve apoi ecuaţia bipătrată, din ale cărei rădăcini să se deducă rădăcinile ecuaţiei reciproce.

G. G. C.

V. 577. x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei $x^2 - px + q = 0$, s se arate că există relaţia:

$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) + \frac{2}{p^3}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).$$

A. A. R.

V. 578. Dacă cercul (I), cu centrul interior cercului (O), trece prin centrul O şi taie acest cerc în punctele C şi C':

1°. Coardele CID şi C'ID', ale cercului O, sunt egale;

2°. $\sphericalangle$ CIC' are drept măsură de două ori măsura arcului CC' cuprins între laturile sale IC, IC'.

Cum se modifică această din urmă proprietate, când centrul este exterior cercului O ?

O. N. Ţ.

V. 579. Se consideră cercul (O) cu centrul în O. Două coarde egale $\overline{CD}$ şi $\overline{C'D'}$ se taie în punctul I interior cercului (O) şi astfel că măsura unghiului CIC' este egală cu de două ori măsura arcului CC' cuprins între laturile sale IC, IC'.

Să se arate că :

a) Vârful I este centrul cercului OCC' ;

b) Raza R a cercului (O) este media geometrică între raza r a cercului OCC' şi lungimea l comună celor două coarde egale $\overline{CD} = \overline{C'D'}$;

c) Dreapta OC este tangentă cercului IOD ;

d) Cercul DOI trece prin punctul C' ;

e) Cercurile OID şi OID' se taie subt un unghiu cât jumătatea unghiului coardelor DD, C'D'.

f) Cum trebue să fie luată măsura arcului CC', pentru ca o coardă (C'D') să împartă pe cealaltă (CD) în medie şi extremă raţie ?

O. N. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 559.* Fie triunghiul dreptunghiu BAC, apoi D proiecţia lui A pe ipotenuza BC, iar E şi F proiecţiile lui D pe catetele AB şi AC. Să se arate că :

$$\text{aria DEF} = \frac{1}{4} h_a^2 \sin 2B.$$

E. M.

VI. 560. Să se arate că, în orice triunghiu, expresia

$$E \equiv \frac{r_a - r}{r_a} + \frac{r_b - r}{r_b} + \frac{r_c - r}{r_c}$$

este constantă (r, r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor înscrise şi exînscrise).

E. M.

VI. 561. Fie ABC un triunghiu ($\sphericalangle B > \sphericalangle C$), A' punctul în care înălţimea vârfului A taie cercul circumscris şi A_1 intersecţia diametrului cercului circumscris ce trece prin A' cu AC. Avem:

$$\overline{AA_1} = \frac{R \sin 2(B-C)}{\cos(B-2C)},$$

R fiind raza cercului circumscris.

C. I. B.

VI. 562. Se consideră triunghiul dreptunghiu ABC şi punctele D, E pe ipotenuza BC astfel ca:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC} = \frac{\overline{BC}}{3}.$$

1°. Să se arate că: $\operatorname{tg} \widehat{DAE} = \frac{3h}{2a}$, h fiind înălţimea.

2°. Să se calculeze $\operatorname{tg} \widehat{BAD}$ şi $\operatorname{tg} \widehat{EAC}$.

3°. Să se facă o verificare a rezultatelor aflate.

G. D. S.

VI. 563. Să se determine relaţia, ce trebue să existe între laturile unui triunghiu oarecare, pentru ca să se poată cu înălţimile sale construi un triunghiu dreptunghiu.

G. G. C.

VI. 564. Să se arate că:

$$\frac{\sin 4x + \sin 6x + \sin 10x}{1 + \cos 4x + \cos 6x + \cos 10x} = \operatorname{tg} 5x.$$

N. M.

VI. 565. Se consideră o prismă triunghiulară oblică ABCA'B'C', la care avem $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{CA} = 4$ cm, $\overline{AA'} = 7$ cm. Muchia $\overline{AA'}$ se proiectează pe planul bazei după $\overline{AO}$ (O, centrul cercului circumscris lui ABC).

Să se facă figura reprezentând desfășurarea prizmei pe un plan.

V. Gh.

VI. 566. Pe laturile triunghiului dat ABC în sensul pozitiv luăm segmentele AM, BN, CP respectiv proporționale cu laturile pe care au fost purtate $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

1°. Să se calculeze aria triunghiului MNP în funcție de aria S a triunghiului ABC.

2°. Pentru ce valoare a coeficientului de proporționalitate aria triunghiului MNP este cea mai mică? Ce proprietăți are triunghiul MNP în acest caz?

3°. Dacă triunghiul M'N'P' este triunghiul care corespunde celuilalt sens pe contur dar aceluiași coeficient de proporționalitate ca MNP, el este echivalent cu MNP.

4°. Ce se întâmplă în cazul excepțional dela 2° cu triunghiurile MNP și M'N'P'?

O N. Ț.

VI. 567. Să se arate că într'un triunghiu oarecare, avem relațiile :

$$\left.\begin{aligned} a\sin\alpha &= b\sin(C+\alpha) + c\sin(\alpha - B)\\ b\sin\alpha &= c\sin(A+\alpha) + a\sin(\alpha - C)\\ c\sin\alpha &= a\sin(B+\alpha) + b\sin(\alpha - A) \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

unde α este un unghiu oarecare (de exemplu, mai mare decât oricare unghiu al triunghiului, dar mai mic ca 180°).

Să se deducă din relațiile (II) al doilea grup de relații cunoscute într'un triunghiu oarecare.

O. N. Ț.

VI. 568. Dacă într'un triunghiu un unghiu este de 60^0, bisectoarele celorlalte două unghiuri ale triunghiului sunt invers proporționale cu laturile corespunzătoare. Să se examineze reciproca acestei proprietăți și să se enunțe condiția necesară și suficientă pentru ca două bisectoare ale unui triunghiu să aibă proprietatea enunțată.

O. N. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 485.* Să se găsească maximul și minimul funcției:

$$z = \frac{a^{xy}}{b^{x^3+y^3}},$$

știind că

$$x + y = \text{constant}.$$

† N. BOTEA.

VII. 486. Să se studieze variația și reprezentarea grafică a funcției:

$$y = +\sqrt{\frac{x^2 - 7x + 6}{x + a}},$$

când a ia valori dela $-\infty$ la $+\infty$.

Caz particular $a = -3$.

G. D. S.

VII. 487. Fie $y = \operatorname{arctg} x\sqrt{x+1}$; avem:

$$2y'(1+3x) + 2xy''(2+3x) + y'''(1+x^2+x^3) + \frac{3}{8}\frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^5}} = 0.$$

N. M.

VII. 488. Să se studieze variația funcției:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x}.$$

G. G. C.

VII. 489. Se dau în epură punctele A $(x, 5, 0)$, B $(x + 3, 0, 2)$ în planul P paralel la linia pământului şi C $(x + 1, 3, 0)$, D $\left(x + \frac{5}{2}, 0, 1\right)$ în planul Q paralel la linia pământului.

Să se determine:

a) Intersecţia celor două plane;

b) Depărtarea acestei intersecţii de linia pământului;

c) Punctele planului Q egal depărtate de A şi B.

C. I. B.

VII. 490. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \left(\frac{1 - 2\cos nx}{2 + \cos nx}\right)^2$$

şi să se reprezinte această variaţie.

O. N. Ţ.

VII. 491. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \left[\frac{2 + \sin nx}{1 - 2\sin nx}\right]^2$$

şi să se reprezinte această variaţie.

O. N. Ţ.

VII. 492. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \frac{k\,\sin x + \cos 2x}{k\cos x + \sin 2x},$$

unde k este un parametru. Discuţie.

Să se construiască curba variaţiei pentru:

$$k = 4;\ 2;\ +1,\ -1,\ -2.$$

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 371.* Fie

$$F(x) \equiv 2x^3 - x^2 - 8x + \alpha^2 - 6.$$

1°. Să se studieze natura rădăcinilor ecuației $F(x) = 0$, unde α este un parametru variabil;

2°. Pentru $\alpha = \sqrt{10}$, să se caute rădăcinile întregi și fracționare.

E. M.

VIII. 372. Să se determine ecuația unei drepte înclinată la 60° pe axa OX și care să determine în iperbola echilateră

$$x^2 - y^2 = a^2$$

o coardă de lungimea $2a\sqrt{2}$.

G. D. S.

VIII. 373. Să notăm cu M(P, Q), punctul de aplicație al rezultantei forțelor $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ aplicate în P și în Q.

Fie în triunghiul ABC, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, trei forțe paralele aplicate în vârfuri și A'(B, C), B'(C, A), C'(A, B), B''(A', C'), C''(A', B'), α(B'', C''); α e situat pe AA'.

N. M.

VIII. 374. Se dau două parabole cu aceeași axă și o direcție. Să se arate că există o singură dreaptă având direcția dată astfel încât cele două puncte în care ea întâlnește o parabolă să fie conjugate armonic cu cele două puncte în care întâlnește cealaltă parabolă.

C. I. B.

VIII. 375. Să se demonstreze că, locul geometric al vârfului A din triunghiul ABC, în care B și C sunt fixe și există relația:

$$\cos A + k \cos B \cos C = 0,$$

k fiind o constantă dată, este reprezentat prin ecuația

$$x^2 + \frac{y^2}{1-k} = \frac{a^2}{4},$$

atunci când raportul $\frac{c}{b} = m$ este variabil; a, b, c fiind lungimile laturilor triunghiului dat.

G. G. C.

VIII. 376. Se prelungeşte segmentul OI cu segmentul $\overline{IC} = 2\overline{OI}$; apoi se construeşte cercurile (O) şi (I) cu razele $\overline{OC}$ şi $\overline{IC}$.

Să se arate că există patrate MNPQ având vârfurile M şi N pe cercul (O), iar P şi Q pe cercul (I).

O. N. Ţ.

VIII. 377. In intervalul $(O, 2\pi)$, să se determine intervalele în care se găsesc rădăcinile reale ale ecuaţiei:

$$\cos^2 z + \sin z \cos z - \sin^2 z = \sin \frac{\pi}{4} \sin z.$$

O. N. Ţ.

VIII. 378. Se consideră o iperbolă raportată la axele sale şi se ia pe ea punctul M_0 şi simetricul său M_0' în raport cu centrele iperbolei. Paralelele duse prin M_0 şi M_0' la asimptotele iperbolei determină un punct P.

Care este locul punctului P, când punctul M_0 ia toate poziţiile pe iperbola considerată?

O. N. Ţ.

VIII. 379. Se consideră o iperbolă raportată la axele sale şi se ia pe ea două puncte M_0 şi M_0' simetrice în raport cu centrul ei. Paralelele, duse prin M_0 şi M_0' la două direcţii oarecare date în planul iperbolei, determină punctul P.

1°. Să se găsească locul punctului P, când M_0 ia toate poziţiile pe iperbola considerată.

2°. Să se determine intersecția locului găsit cu iperbola considerată.

3°. Să se examineze cazul când *direcțiile date* în planul iperbolei sunt simetrice în raport cu axa unghiurilor X'X.

O. N. Ț.

VIII. 380. Să se arate că ecuația:

$$x^n + \alpha^2\gamma x^2 + 2\alpha\beta\gamma x + \beta^2\gamma = 0,$$

unde n este întreg pozitiv, iar α, β, γ numere reale, nu poate avea mai mult de două rădăcini reale.

O. N. Ț.

VIII. 381. Să se discute natura rădăcinilor ecuației:

$$x^n + (n-2)\,\alpha^2x^2 + 2(n-1)\,\alpha\beta x + n\beta^2 = 0,$$

unde α și β sunt doi parametri, iar n întreg > 2.

O. N. Ț.

Toate Clasele [1]). *Exerc. 269.* Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A. Bisectoarea BB' a unghiului B întâlnește în D perpendiculara pe AC în C. Se ia pe DB o lungime $\overline{DE}$ egală cu $\overline{BB'}$.

Să se demonstreze că perpendiculara în E pe BD *trece printr'un punct fix* atunci când B' și C sunt fixe.

GH. B.

T. C. 270. In cercul O se dă patrulaterul înscris ABCD având diagonalele BD și AC. Fie E proiecția lui B pe DC; F intersecția lui BE cu O și H intersecția laturilor opuse AB, DC. Perpendiculara în H pe DC este întâlnită în C' și D' de CF și DF.

Să se arate că triunghiurile CAC' și DAD' sunt dreptunghice.

GH. B.

---

1) La *T. C. 267* în loc de „*11, 13, 17, 19*" trebue „*7, 13, 17, 19*".

T. C. 271. Să se găsească un patrat perfect de nouă cifre, ştiind că el începe cu patru cifre identice şi se termină cu două cifre identice; iar rădăcina patrată se termină cu trei cifre identice, ultima cifră a patratului fiind jumătatea ultimei cifre a rădăcinii patratului, iar prima cifră a patratului şi ultima cifră a rădăcinii sunt consecutive.

O. N. Ţ.

T. C. 272. Care sunt numerele prime care pot să divid un patrat de cinci cifre şi care dintre ele nu divid un patrat de patru cifre?

O. N. Ţ.

T. C. 273. Să se aşeze două numere prime unul după altul astfel ca numărul format să fie patratul unui al treilea număr prim.

O. N. Ţ.

T. C. 274. Care este cel mai mare patrat perfect de şase cifre care este divizibil cu *13* şi *19*?

O. N. Ţ.

T. C. 275. Care este cel mai mic cub perfect par divizibil cu *7*, *11* şi *13*?

O. N. Ţ.

ERATĂ. 1⁰. La exerc. V, 562 ecuaţia este:

$$\sqrt{a}+\cfrac{x}{\sqrt{a}+\cfrac{x}{\sqrt{a}+\cfrac{x}{\sqrt{a}}}}=\lambda\sqrt{a}.$$

G. D. S.

2⁰. La exerc. VIII, 367 coeficientul lui x^4 este 93.

G. D. S.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuș, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se vor scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M.O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. — C. 61.107

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 7 1 APRILIE 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAŢIUNII"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 7 — 1 APRILIE 1940

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa III-a. *Exerc. 102.* $\overline{MA} \cdot \overline{MA'}$ este puterea punctului M faţă cu cercul ABC, deci

$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MB} \cdot \overline{MC} = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2}{4}.$$

Deasemenea

$$\overline{NB} \cdot \overline{NB'} = \overline{NC} \cdot \overline{NA} = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{\overline{AC}^2}{2}.$$

Egalitatea de stabilit devine:

$$\frac{\overline{BC}^2 \cdot \overline{AA_1}^2}{4} = \frac{\overline{AC}^2 \cdot \overline{BB_1}^2}{4}$$

sau

$$\frac{\overline{BC} \cdot \overline{AA_1}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BB_1}}{2}$$

egalitate evidentă întrucât fiecare parte, cea din stânga şi cea din dreapta egalului, reprezintă aria triunghiului ABC.

C. I. B.

III. 103. Schimbăm mezii

$$\frac{16+x}{16} = \frac{37+x}{22} = \frac{21}{6}$$

ultimul raport obţinut scăzând numărătorii între ei şi numitorii între ei; x se reduce, căci dacă şi descăzutul şi scăzătorul cresc cu acelaş număr x, diferenţa e aceeaş; de aici

$$16+x = \frac{16 \times 21}{6} = 8 \times 7 = 56$$

deci

$$x = 56 - 16 = 40.$$

N. M.

Clasa IV-a. *Exerc. 454.* 1°. Triunghiul MPQ este dreptunghic în M deoarece bisectoarele a două unghiuri adiacente suplimentare sunt perpendiculare. Intrucât triunghiurile dreptunghice APQ şi MPQ au comună ipotenuza PQ, relaţia 1-a rezultă imediat după teorema lui PITAGORA.

2°. Triunghiurile dreptunghice ART şi MST având egale unghiurile din T, sunt asemenea. Rezultă deci proporţia:

$$(1) \qquad \frac{AT}{MT} = \frac{AR}{MS}.$$

Insă mai avem

$$(2) \qquad \overline{AR}^2 = PR \cdot \overline{RQ}$$

$$\overline{MS}^2 = \overline{PS} \cdot \overline{SQ}.$$

Ridicând la pătrat proporţia (1), făcând produsul mezilor egal cu al extremilor şi ţinând seamă de egalităţile (2), rezultă şi a 2-a relaţie.

V. GH.

IV. 465. Desfăcând diferenţa de patrate, în produs de sumă prin diferenţă, avem

$$(1+x+2x^3)^2 - (1+x+2x^2)^2 = (2+2x+2x^2+2x^3)(2x^3-2x^2)$$
$$= 4x^2[x+1+x^2(x+1)](x-1) = 4x^2(x+1)(x-1)(x^2+1)$$
$$= 4x^2(x^2-1)(x^2+1) = 4x^2(x^4-1).$$

c. t. a. N. M.

Clasa V-a. *Exerc. 561.* Fie $\overline{OI}$ perpendiculară pe $\overline{AD}$; în acest caz având:

$$AI = ID$$

şi prin ipoteză $\overline{AB} = \overline{CD}$ $\therefore$ $\overline{BI} = \overline{IC}$;

deci OI trebue să treacă prin O', cu alte cuvinte coarda AD soluţia problemii are direcţia perpendiculară pe MN. Observând încă că

$$IC = \frac{1}{3} ID \; ; \text{ că } \overline{IC}^2 = OI \cdot IM \; , \; \overline{ID}^2 = NI \cdot IM$$

$$\therefore \qquad \frac{NI}{OI} = 9 \; ; \quad \text{sau} \quad \frac{R}{OI} = 8,$$

de unde rezultă următoarea construcție: Impărțim segmentul $\overline{OM} = R$ în opt părți egale și însemnăm cu I punctul astfel ca $\overline{OI} = \frac{R}{8}$; apoi prin I ducem perpendiculara pe OM și coarda tăiată pe această perpendiculară de cercul O este coarda cerută $\overline{AD}$. Mai există soluția banală când punctele A, B, C, D se confundă în M, având în acest caz:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 0.$$

O. N. Ț.

Clasa VIII-a. *Exerc. 340. Prin vârfurile* B *și* C *ale triunghiului* ABC *se duc dreptele paralele* Δ_b *și* Δ_c. *O dreaptă trecând prin* A *le întâlnește în* B′ *și* C′. *Paralelele duse prin* B′ *la* AC *și prin* C′ *la* AB *se întâlnesc într'un punct al laturii* BC.

† N. Botea.

Luăm ca axă a x-lor direcția lui BC, iar ca axă a y-lor mediatoarea lui BC. Luăm coordonatele punctelor precum urmează:

$$A(x_1, y_1) \quad , \quad B(-b, o) \quad , \quad C(b, o).$$

Dreptele Δ_b, Δ_c, B′AC′ au ecuațiile următoare:

$$(\Delta_b)\ y = m(x + b)$$

$$(\Delta_c)\ y = m(x - b)$$

$$(B'AC')\ y - y_1 = \mu(x - x_1)$$

unde m și μ sunt coeficienții unghiulari a două direcții, prima fixă și a doua variabilă.

Luând ecuațiile (Δ_b) și (B′AC′), prin rezolvirea sistemului lor, obținem coordonatele punctului B′.

$$B' \begin{cases} x = \dfrac{y_1 - \mu x_1 - mb}{m - \mu} \\ y = \dfrac{m(y_1 - \mu x_1 - b\mu)}{m - \mu}. \end{cases}$$

Schimbând aci pe $-b$ cu b, obținem și coordonatele lui C′:

$$C' \begin{cases} x = \dfrac{y_1 - \mu x_1 + mb}{m - \mu} \\ y = \dfrac{m(y_1 - \mu x_1 + b\mu)}{m - \mu}. \end{cases}$$

Ecuațiile dreptelor (B'M) și (C'M) sunt:

$$(B'M)\ y - \frac{m(y_1 - \mu x_1 - b\mu)}{m - \mu} = \frac{y_1}{x_1 - b}\left(x - \frac{y_1 - \mu x_1 - mb}{m - \mu}\right)$$

$$(C'M)\ y - \frac{m(y_1 - \mu x_1 + b\mu)}{m - \mu} = \frac{y_1}{x + b}\left(x - \frac{y_1 - \mu x_1 + mb}{m - \mu}\right).$$

Rezolvind sistemul format de ele rezultă coordonatele punctului lor de intersecție:

$$M\begin{cases} x = \dfrac{m\mu x_1^2 - m\mu b^2 - m x_1 y_1 - \mu x_1 y_1 + y_1^2}{y_1(m - \mu)} \\ y = 0 \end{cases}$$

ceea ce rezolvă chestiunea propusă.

VIII. 352. Luăm axele de coordonate obișnuite (ca axă $x'x$ axa parabolei, iar ca axă yy' perpendiculara ridicată pe aceasta la jumătatea distanței între focar și directoare), ecuația parabolei este:

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

$M\left(-\frac{p}{2}, \alpha\right)$, α fiind un parametru variabil. Deci

$$(FM) \qquad y = \frac{\alpha(2x - p)}{-2p}. \tag{2}$$

Fie L punctul în care FM taie parabola. Găsim coordonatele lui L rezolvând sistemul (1), (2).

Ecuația care dă pe x este:

$$4\alpha^2 x^2 - 4p(\alpha^2 + 2p^2)x + \alpha^2 p^2 = 0,$$

deci

$$x = \frac{p(\alpha^2 + 2p^2) \pm 2p^2\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2\alpha^2}$$

și

$$y = \frac{p^2 \pm p\sqrt{\alpha^2 + 1}}{-\alpha^2}.$$

Rezultă:

$$N\left[\frac{p(\alpha^2 + 2p^2) \pm 2p^2\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2\alpha^2}, \quad \frac{p^2 \pm p\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha^2}\right].$$

Notând $P(x_1, y_1)$,

$$y - y_1 = \frac{2[p^2 \pm p\sqrt{\alpha^2+1} - \alpha^2 y_1]}{p(\alpha^2+2p^2) \pm 2p^2\sqrt{\alpha^2+1} - \alpha^2 x_1}(x - x_1).$$

Eliminând pe α între această ecuație și (2), găsim locul.

C. I. B.

Până la 5 Martie s'au primit soluții bune pentru exercițiile publicate în n-rele 3, 4, 5 și 6 anul VI, dela[1]):

Liceul „Carmen-Sylva" București.

Clasa IV-a: Cristea Lambrina (IV: 464, 5), Damian Lucia (IV: 463, 4, 74*, 86*).

Clasa VI-a: Georgescu N. Liliana (VI: 552*, 4*, 9, 60, 6), Vasilescu Alexandra (VI: 554, 9, 66*).

Clasa VII-a: Azimișoara Ș. Fivi (VII: 468, 72), Crașoveanu Lucia (VII: 468, 71, 2, 6), Georgescu Diana (VII: 466, 7, 71), Țone Aurelia (VII: 466), Urseanu Otilia (VII: 468, 72), Vasiliu Margareta (VII: 465, 8, 70, 1, 2, 7*, 80)

Clasa VIII-a: Constantinescu Paula (VIII: 362, 70), Nissim L. Mioara (VIII: 349*, 58*, 60*).

Școala Centrală de fete București.

Clasa IV-a: Cațafani V. Andreia (IV: 486), Laurian M. Michaela (IV, 471), Podeanu Lidia Marg. (IV: 464, 71, 3), Posădescu Ligia (IV: 473), Stoenescu D. Jana (IV: 465, 71, 3, 4*, 80, 3), Teodorescu Viorica (IV: 471), Zăgănescu Yvona (IV: 471*).

Clasa VI-a: Agapie G. Elena (VI: 554).

Liceul „Regina Maria" București.

Clasa III-a: Agapie Paula (III: 119).

Clasa IV-a: Petrescu C. Lidia (IV: 484, 6*).

Institutul „Ortodox" București.

Clasa III-a: Mateescu P. Michaela (III: 104, 5, 8).

Clasa VII-a: Maican Tuți: (VII: 464, 5, 6, 8, 9, 70, 1).

Liceul „Iulia Hajdău" București.

Clasa VI-a: Stoia N. Sylvia (T. c.: 243, 51).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Liceul de fete „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa IV-a : MĂNESCU MARGARETA (IV : 465, 74*).

Liceul „Notre Dame de Sion" Bucureşti.

Clasa IV-a : ODOBEŞTEANU FR. (IV : 457, 65).

Liceul „Santa Maria" Brăila.

Clasa IV-a : DIMITRIU ISABELA (IV : 464, 5*, 71*, 4, 9, 86*).

Liceul „Domniţa Ileana" Constanţa.

Clasa IV-a : VASILIU GEORGETA (IV : 464, 5, 71*, 3, 4).

Liceul „Elena Doamna" Cernăuţi.

Clasa IV-a : ION I. ŞTEFANIA (IV : 465).

Liceul „Notre Dame de Sion" Iaşi.

Clasa IV-a : BRONSON P. LYA (IV : 488), COJOCARIU I. ELLA (IV : 465, 71), COPAL ESTERA (IV : 468, 72, 9, 82), CON LIDIA (IV : 463, 4, 74, 9), IONESCU V. ELENA (IV : 464, 5*, 6*, 9, 71*, 4), KAISERMAN D. (IV : 479), MANASE SOFIA (IV : 463, 4, 5), SILBERMAN EVELINA (IV: 476), SOLOMON ETTY (IV : 474).

Liceul de fete Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VI-a : COSTEA ANA (VI : 540), DRAGOMIR MARIA (VI : 540).
Clasa VII-a : JURCAN SOFIA (VII : 241, 51).

Liceul „Carmen-Sylva" Timişoara.

Clasa IV-a : ROŞU D. GLICHERIA (IV : 471*, 3).
Clasa VII-a : GAL E. LILI (VII : 472, 5) LEIBOVICI ANIE (VII : 459, 65, 8, 70, 1, 8), MANG ILEANA (VII : 465, 6, 7, 8, 70, 1, 2, 5), PLEŞA I. ILEANA (VII : 468, 9, 70, 1, 2, 6), SEVERINEANU MARIA (VII : 459, 65).
Clasa VIII-a : CHECIAN ANA (VIII : 378).

Liceul de fete Turnu-Severin.

Clasa III-a : CORÂCIU I. NICULINA (III : 104).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a : BÂLCU S. N. (IV : 465), DIMOS FL. (IV : 477, 85, V : 555), DUMITRESCU F. D. (IV : 478, 81, 6*, V : 577), MORDCOVICI L. (IV : 463, 4), NICOLAU G. (V : 558, T. c. : 249).
Clasa V-a : PENESCU N. V. (V : 555), STOIKA V. V. (V : 547, 68, 9, 79, VI : 543).
Clasa VI-a : IONESCU GR. (VI : 552), MIHALACHE I. (VI : 540).
Clasa VII-a : CIURESCU I. F. (VII : 462), GHEORGHIADI G. G. (VII : 462), MIHĂILEANU C. ST. (VII : 460, 4, T. c. : 246), PETERNELLI P. (T. c. : 240, 3).
Clasa VIII-a : GÂRNEŢIU J. L. (VIII : 370), GHIŢESCU M. (T. c. : 243, 4, 5), NICOLAESCU T. T. (VIII : 360, 2, 70).

Liceul „Spiru Haret“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Bârlea S. (IV: 464, 5, 73, 4), Dominic M. (IV: 471), Fizzotti V. (IV: 474), Iorgu C. (IV: 474), Herişescu A. A. (IV: 464, 5).

Clasa VI-a: Georgian P. (VI: 449, 54), Popescu-Necseşti A. (T. c.: 243).

Clasa VII-a: Andreescu M. (VII: 471, 6), Alexandru M. (VII: 476, 7, 81), Blanc E. (VII: 477, 88), Ghitnic R. (VII: 477, 84, 8), Kohnfeld (VII: 472, 6, T. c.: 251), Moscovici N. (VII: 477), Mişu Al. (VII: 464*, 72), Lupulover L. (VII: 472, 7, 88), Saront V. S. (VII: 472, 88), Zahareanu Ş. (VII: 459, 60), Weinberg E. E. (VII: 472).

Clasa VIII-a: Goldstein M. (VIII: 349), Grigoriu D. (VIII: 358, 63, 70), Guralivu E. (VIII: 342, 5, 70), Racoviceanu G. V. (VIII: 351), Solomon M. (VIII: 358, 60, 4, 70), Şeibulescu Ct. (VIII: 458, 60, 70).

Liceul „Mihaiu Viteazul“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Băluţă T. (T. c.: 249, 50), Trestianu N. S. (VI: 537, 64).

Clasa VII-a: Beno M. (VII: 477, 8, 81, 2, 3, T. c.: 261, 2), Vernescu P. (VII: 459, 66, 72).

Clasa VIII-a: Nicolescu T. (VIII: 351*).

Liceul „Gh. Lazăr“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Alexandru I. (IV: 464, 5*, 71, 3, 4).

Clasa V-a: Bărdescu T. A. (V: 539), Petculescu N. (V: 577), Priscu Al. (V: 562, VII: 460).

Clasa VI-a: Brânceni-Iliescu C. (T. c.: 271, 4, 5).

Clasa VII-a: Andonie C. Gh. (T. c.: 244, 5), Haid J. (VII: 462), Moscovici E. (VII: 462), Krauss R. (VII: 462, T. c.: 243, 4, 5), Nicolau G. C. (VII: 462), Popa Vl. (VII: 462, T. c.: 241, 51), Stănculescu E. (VII: 459, 60, 2, 4).

Liceul „T. Maiorescu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Albulescu N. V. (IV: 463, 4, 5).

Clasa VII-a: Bugaieoski S. E. (VII: 459, 68, 9, 70, 1, 2), Dobrescu T. T. (VII: 459, 64, 6, 8, 9, 72), Dăscălescu St. M. (VII: 472, 88).

Clasa VIII-a: Călin P. I. (VIII: 362).

Liceul „M. Eminescu“ Bucureşti.

Clasa V-a: Wolfsohn H. (IV: 464).

Clasa V-a: Dumitrescu E. D. (V: 546).

Clasa VIII-a: Leibovici S. (VIII: 371, 5, 80), Mateescu Ar. (VIII: 349).

Liceul „Matei Basarab“ Bucureşti.

Clasa III-a: Ieşan I. Al. (III: 104, 8, 18).

Clasa IV-a: Adelstein L. (IV: 473), Alexandrescu I. I. (IV: 481), Antonescu D. E. (IV: 461, 3, 4, 71*), Anghelescu G. F. (T. c.: 249), Lazăr C. Şt. (IV: 481), Stângă M. V. (T. c.: 249, 50, 1).

Clasa V-a: Benjamin S. (V: 571), Covrigeanu R. (V: 569), Ghelber Adr. (V: 560, T. c.: 249), Negrescu I. S. (V: 561), Satinover L. (V: 560), Saiovici C. E. (V: 569, 71, 2), Tudori Em. (V: 531).

Clasa VI-a: Vasiliu B. (VI: 536).

Liceul „Aurel Vlaicu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Ciuntu I. Gh. (IV: 481, 6).
Clasa VI-a: Mănescu I. (VI: 551, 7).
Clasa VII-a: Barbaiani A. I. (VII: 459, 60, 4, 5, 6, T. c.: 240, 1, 2, 3, 4, 5), Buga I. M. (VII: 459, 60, 4, 6, T. c.: 240, 1, 3, 4, 5).

Liceul „Sft. Andrei“ Bucureşti.

Clasa VII-a: Filiti Gr. (VII: 459), Mihoci (VII: 459, T. c.: 251), Ortenberg E. (VII: 462, T. c.: 249, 51, 5), Senchi E. (VII: 483), Ştefanovici I. (VII: 472, 83), Vasilescu I. (VII: 459, 66, 83), Voiculescu N. I. (VII: 468, 9, 70, 1, 3, 6, 8, T. c.: 271).

Liceul „Cantemir Vodă“ Bucureşti.

Clasa V-a: Pădureanu Niculaie (V: 551, 2).

Liceul „Gh. Şincai“ Bucureşti.

Clasa V-a: Constantinescu I. E. (T. c.: 240), Pascu M. C. (T. c.: 240).
Clasa VI-a: Sava Păulică (VI: 551).

Liceul „Schewitz Thierrin“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Folea M. (VI: 548).
Clasa VII-a: Mărgărint I. N. (T. c.: 249, 51).

Liceul „Profesorii Asociaţi“ Bucureşti.

Clasa V-a: Kladiu A. (V: 539).
Clasa VII-a: Marcussohn L. O. (VII: 468, 71, 5, 8, 83).

Liceul „Sf. Gheorghe“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Andonie I. (T. c.: 241, 2, 3, 4, 5, 8, 53*, 4*, 5).

Liceul seral „Sft. Sava Bucureşti“.

Clasa VI-a: Marinescu V. (VI: 540).

Liceul „Moise Nicoară“ Arad.

Clasa V-a: Flessig L. (V: 555, 65), Nistor I. I. (V: 540, 60, 3, 5, VII: 460, T. c.: 251), Popa T. T. (V: 540, 55, 60, 3*, 5), Schwartz L. (V: 552).

Liceul „Samuil Vulcan“ Beiuş.

Clasa VII-a: Deheleanu I. G. (VII: 465, 8, 9, 70, 1, 2).
Clasa VIII-a: Vosţinariu Gh. (VIII: 349, 52).

Liceul „Ferdinand I“ Bacău.

Clasa III-a: Edelstein M. (T. c.: 249, 51).
Clasa V-a: Iosipescu E. P. (V: 555, T. c.: 246).

Liceul „Sft. Vasile“ Blaj.

Clasa III-a: Cișmas O. (III: 103, 4).
Clasa IV-a: Balea S. I. (T. c.: 264).
Clasa VIII-a: Oprișa N. (VIII: 360, 6).

Liceul „Laurian“ Botoșani.

Clasa VI-a: Katz I. I. (T. c.: 251).

Liceul „Andrei Șaguna“ Brașov.

Clasa VII-a: Badea I. (VII: 477, 81).

Liceul „Dr. I. Meșota“ Brașov.

Clasa IV-a: Dumitrașcu O. (IV: 471, 3, 86*), Iordan D. I. (IV: 470, T. c.: 274), Ouatu D. I. (IV: 470), Pantilimonescu V. C. (IV: 470), Trandafirescu T. (IV: 470).
Clasa V-a: Florică St. (V: 552, 60, T. c.: 251).

Liceul „N. Bălcescu“ Brăila.

Clasa VII-a: Chirculescu M. (VII: 462).
Clasa VII-a: (particulari) Cotârcu M. (VII: 469, 72, 5, 8, 81), Făinaru I. (VII: 469, 72, 8, 82).

Liceul Internat „Buftea“.

Clasa VII-a: Constantin M. P. (VII: 466), Mateiu P. (VII: 466), Popescu P. (VII: 460).

Liceul „I. Assan“ Caracal.

Clasa VI-a: Musceleanu I. (T. c.: 240, 1, 3, 4, 5).
Clasa VII-a: Gligor I. D. (VII: 460, 5, T. c.: 241), Langu N. (VII: 459, 64*, 8, 70, 1).

Liceul „Știrbey Vodă“ Călărași.

Clasa VII-a: Bordușan P. (VII: 762), Ionescu V. (T. c.: 243, 4, 5, 51), Rădulescu M. (VII: 462, T. c.: 255).

Liceul „D. B. Știrbey“ Câmpina

Clasa IV-a: Belloiu N. (IV: 459), Bărbulescu I. G. (IV: 459), Bilașcu C. (IV: 459), Cosma G. C. (IV: 459), Constantinescu I. I, (IV: 459), Catea A. G. (IV: 459, T. c.: 251), Cristian E. (IV: 459), Costache N. G. (IV: 459), Curcăneanu G. (IV: 459, 65), Ciorbă G. (IV: 459), Cernat M. (IV: 459, T. c.: 249, 51), Dinescu St. (IV: 459), Enescu G. (IV: 459), Fava G. (IV: 459, 63, T. c.: 249), Gherovici G. N. (IV: 459), Ianculescu (IV: 459), Leu G. (IV; 459), Mănoiu V. (IV: 459), Mihailovici H. (IV: 459), Moldoveanu G. I. (IV: 459), Moga M. (IV: 459), Oproiu A. (IV: 459), Preda N. S. (IV: 459), Șerban (IV: 459), Tatulescu A. A. (IV: 459), Vlad S. I. (IV: 459).
Clasa V-a: Rădulescu N. V. (V: 552, 6*, 60).
Clasa VI-a: Beloiu C. (T. c.: 253), Brezeanu D. (VI: 540), Cernat I. I. (T. c.: 249), Davidescu I. M. (T. c.: 249), Hoinărescu B, (T. c.: 249), Munteanu G. (VI: 528), Tudose C. I. (T. c.: 249).

Clasa VIII-a: Alexiu D. (VIII: 340), Bistriceanu A. (VIII: 340), Guess I. I. (VIII: 340), Lăzăroiu P. (VIII: 340, T. c.: 240, 5, 9), Heller I. (T. c.: 249, 51), Ionescu N. V. (VIII: 340), Mihăilescu C. C. (VIII: 340, T. c.: 240, 50, 65), Nicolescu R. I. (VIII: 340), Păunescu C. V. (VIII: 340), Popescu I. Șt. (VIII: 340), Popescu I. V. (VIII: 340), Predescu N. O. (VIII: 340), Peovici P. S. (VIII: 340), Stoian I. H. (VIII: 340).

Liceul militar „Regele Ferdinand" Chișinău.

Clasa IV-a: Dumitrescu G. G. (T. c.: 251), Russu I. (IV: 457, 64, 5).

Clasa V-a: Voicu Gh. (V: 552).

Clasa VI-a: Cristea C. (T. c.: 240, 8, 9).

Clasa VII-a: Ionescu C. (VII: 465, 6, 8, 9, 70, 1), Moldoveanu N. D. (T. c.: 249, 50), Nicolaie I. I. (VII: 466, 9, 70, 1).

Liceul „Alecu Russo" Chișinău.

Clasa IV-a; Surureanu N. (IV: 464, 68).

Liceul „Aron Pumnul" Cernăuți.

Clasa V-a: Rieber W. (T. c.: 240, 9, 51).

Liceul militar „Ștefan cel Mare" Cernăuți.

Clasa III-a: Anton G. M. (V: 555), Bocăneț V. V. (V: 555), Sintescu V. M. (III: 109).

Clasa IV-a: Bărbulescu Șt. (IV: 479), Cândea M. S. (IV: 479), Căpriță G. I. (IV: 477, 9, 81), Colănel D. I. (IV: 479, 81), Cimbru M. (IV: 473, 4, 9), Cihoski V. (IV: 479, 81), Cortușan C. J. (IV: 479, 81, 90), Damian I. (IV: 479), Dimitriu M. (IV: 479), Dumitrescu I. (IV: 457), Guță I. (IV: 479, 81), Huțul C. (IV: 481, T. c.: 243), Iliescu R. (IV: 471, 9), Nicolaescu T. I. (IV: 480, 1), Popescu C. (IV: 471, 81), Rizescu N. O. (IV: 464, 71, 3, 9, 81), Rangu Ct. (V: 555), Staicu Ct. (IV: 471, 6, 9, 80, 1, 90, 1, T. c.: 246), Sainciuc D. (IV: 479), Scurtu R. (IV: 479), Spirescu G. N. (IV: 471), Tănase I. G. (IV: 479, 80, 1), Tamarit R. (IV: 479), Teodorescu (IV: 479), Vasiliu D. (IV: 475, 6, 9, 80, 1, 90), Vasiliu Il. (IV: 479), Zuguleac N. (IV: 481).

Clasa V-a: Bănescu M. (V: 565), Trifan V. (V: 560).

Clasa VI-a: Adam N. (VI: 550), Bojinu C. D. (VI: 535), Caulea V. I. (VI: 538, 50, T. c.: 240), Diaconescu V. C. (T. c.: 240, 1), Dombrovski (T. c.: 240). Irimescu S. P. (VI: 550, T. c.: 240, 1), Ioan D. H. (VI: 550, T. c.: 240, 1), Jupa C. H. (T. c.: 240), Nubert R. (VI: 532, 4, 50), Slătineanu F. C. (T. c.: 240), Vâlceanu A. (T. c.: 241), Vișan C. T. (VI: 550), Vlădescu I. G. (T. c.: 240), Zovati C. C. (T. c.: 240).

Clasa VIII-a: Alexandrescu D. V. (VIII: 360), Ciociu V. I. (VIII: 360), Gviazdomorschi E. R. (VIII: 360), Ianculescu I. E. (VIII: 358, 60), Ionescu D. St. (VIII: 360), Măgean N. (VIII: 360), Mocanu I. C. (VIII: 360), Pavlovskj St. (VIII: 360), Pârvu N. A. (VIII: 351), Pletea M. (VIII: 360), Popa C. C. (VIII: 360), Rollea C. V. (VIII: 351: T. c.: 241, 62), Tutulan M. D. (VIII: 360), Vlădescu M. (VIII: 360), Walter I. P. (VIII: 360).

Liceul „Gh. Barițiu“ Cluj.

Clasa VI-a: Capdebo Fr. (VI: 549, 50, 1, 2)·

Clasa VII-a: Gherman E. (459, 60, 4, 5, 70, 2, 5), Nasta C. L. (T. c. 243, 4, 5).

Liceul „Mircea cel Bătrân“ Constanța.

Clasa VI-a: Sotiriu Th. (VI: 546, 8, 9).

Colegiul Național „Carol I“ Craiova.

Clasa VII-a: Ciucă A. (VII: 459, 64, 6), Sitaru C. (VII: 464, 6, 72).

Clasa VIII-a: Petrulian P. (VIII: 338, 60).

Liceul „Frații Buzești“ Craiova.

Clasa IV-a: Marian M. D. (IV: 470, 1*).

Clasa VIII-a: Marian M. I. (VIII: 343).

Liceul militar „D. A. Sturza“ Craiova.

Clasa IV-a: Călinescu I. N. (IV: 464, 71, 4, V: 555), Cioroianu C. (IV: 464, 71), Nicolaescu M. N. (IV: 463, 4, 5*, 71), Pănescu N. A. (IV: 463, 4, 5, 71, V: 555), Udrea C. I. (IV: 471, V: 561).

Clasa V-a: Bădescu Fl. (V: 552, 61), Băldescu V. (V: 561), Botezatu Tr. (V: 552), Buduță Tr. (T. c.: 249), Constantinescu C. (V: 552), Cioc I. M. (T. c.: 251), Dascălu I. Ș. (V: 555), Dinculeanu N. (V: 561, T. c.: 249), Dogaru D. M. (V: 544, 52, 5, 61), Duduță Tr. (V: 552, 61), Encuțescu P. A. (V: 535, 52), Fărtățescu (V: 552, T. c.: 249), Ginea N. M. (V: 555, 60, 1), Gheorghe V. M. (V: 561), Hurezeanu V. M. (V: 555), Ionașcu Fl. (V: 552), Ismană G. M. (V: 555, 61, T. c.: 249), Mareș A. Em. (V: 552, 5, 60, 1), Marincu D. I. (V: 552, 61), Marinescu Pașoi M. (V: 552, 5, 61, T. c.: 249), Miriescu Tr. (V: 561), Oprescu D. M. (V: 561), Polizu Al. (V: 552, 5, 61), Procopie C. N. V. (V: 561), Pretorian M. (V: 560), Popescu I. M. (V: 551, 2), Preda G. M. (V: 536, 52, 61), Rădulescu H. (T. c.: 249), Ruja T. I. (V: 552, 5, 60. 1, T. c.: 249), Săndulache N. Al. (VII: 483), Sbenghe V. M. (V: 551), Teodorescu G. (T. c.: 249), Vilaia G. (V: 560, 1, T. c.: 249), Zamfir M. M. (V: 552, 5, 61).

Clasa VI-a: Băcanu C. (T. c.: 251), Bărbuceanu V. V. (VI: 535, T. c.: 249), Bogdănescu N. (T. c.: 249), Ceaușu V. (VI: 549, T. c.: 249, 51), Cercel J. V. (T. c.: 249, 51), Cioc I. M. (VI: 522, VII: 452), Danieleanu M. G. (VI: 533*, T. c.: 251), Diaconu D. A. (T. c.: 249), Diaconu M. I. (T. c.: 249, 51), Dobrescu I. P. (VI: 552, T. c.: 251), Drăgan S. Z. (T. c.: 251), Guran M. T. (T. c.: 251), Heinrich M. C. (T. c.: 251), Juscu St. S. (T. c.: 249, 50), Mărculescu D. T. (T. c.: 251), Marinescu M. (T. c.: 249, 50), Mateescu A. (VI: 554, 61, VII: 460, 4, 6, T. c.: 265), Minciunescu P. D. (T. c.: 251), Popa P. E. (T. c.: 251), Pașoi N. D. (T. c.: 249, 51), Popescu G. G. (T. c.: 249), Popescu D. V. (T. c.: 249, 51), Savin I. R. (T. c.: 249, 5), Steluța T. (T. c.: 249, 51), Zaharia G. S. (VI: 550).

Clasa VII-a: Marinescu C. S. (VII: 459), Mavrodin S. (VII, 459, 66), Săndulescu Al. (VII: 459).

Clasa VIII-a: Constantinescu-Voicu D. G. (VIII: 340, 1, 51).

Liceul „Unirea" Focșani.

Clasa VII-a: Foga A. (VII: 466, 8, 9, 70, 1, 2, 6).
Clasa VIII-a: Baruch M. (T. c.: 249), Nicoară T. (VII: 362, 5, 78).

Liceul „V. Alecsandri" Galați.

Clasa VII-a: Abeles Fl. (T. c.: 240, 60).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VII-a: Călugăreanu R. A. (VII: 466, 72), Petrescu R. G. (VII: 462, 77).
Clasa VIII-a: Văduva F. M. (T. c.: 240, 2, 3, 52).

Liceul „Național" Iași.

Clasa V-a: Nacht H. S. (V: 565, 7).

Liceul „M. Kogălniceanu" Iași.

Clasa VI-a: Cojocariu I. L. (VI: 552).

Liceul Internat „C. Negruzzi" Iași.

Clasa IV-a: Stihi P. (IV: 527, T. c.: 241, 2, 3, 5).
Clasa VI-a: Cerbureanu I. P. (T. c.: 241, 2, 3, 4, 5, 9*, 50, 1, 4), Manolache C. Tr. (VI: 535, 49, T. c.: 241, 50, 5), Manolache V. (T. c.: 244, 5, 9, 50), Rabinski N. (VI: 535, T. c.: 240, 1, 2, 3, 9, 50, 1, 5).
Clasa VII-a: Berechet M. St. (T. c.: 241).

Liceul militar „G-ral Makarovici" Iași.

Clasa III-a: Brighin C. (III: 104), Dimitriu M. (III: 104), Edu E. (III: 104), Mihăilescu I. Șt. (III: 104, 9), Păstrăvanu Tr. (III: 104), Zaharia R. (III: 104).
Clasa V-a: Cozloschi V. M. (V: 537).
Clasa VI-a: Drăghicescu P. (VI: 466, 536*, 47, 8*, 9*, 50, 1, 3*, 8, 64*, 5, T. c.: 265), Iacomi D. M. (VI: 541, 5, 50), Pârlog I. (VI: 550), Stamate A. (VI: 532, 5, 40, T. c.: 234), Zamfir I. (VI: 535, 47, 9, 51, T. c.: 265).
Clasa VII-a: Atanasiu C. V. (T. c.: 249), Rotman Gh. (T. c.: 251).
Clasa VIII-a: Jiletcovici Al. (VIII: 351*, 60, 2, 4, 6, 8, 70), Pantelimon C. (VIII: 368*, 70), Pascaru I. C. (VIII: 368*), Potopeanu Gh. (VIII: 369), Rohr I. Al. (VIII: 360, 8*, 9, T. c.: 265), Turcu R. S. (VIII: 364, 6).

Liceul „Petru Rareș" Piatra-Neamț.

Clasa VIII-a: Soroceanu V. D. (VIII: 360).

Liceul „Brătianu" Pitești.

Clasa V-a: Popescu M. (VI: 540, T. c.: 242, 9, 51, 61, 2).
Clasa VII-a: Tologea S. (VII: 467, T. c.: 252).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel“ Ploeşti.

Clasa IV-a: Dima C. (IV : 463, 4), Ghinea V. I. (IV : 463, 4), Jupceanu N. N. (IV : 455, 68, 70, 3, 9, 81, 6*, V : 531, 51, 5, VI : 527*, T. c. : 240, 1, 4, 5, 9), Priboiu T. (IV : 471, 3, 9, V : 555), Vintilescu G. (IV : 463, 4, 74).

Clasa V-a: Cătuneanu Tr. (V : 560, 5), Moţoiu (V : 552), Vernescu (V : 558), Weitzman I. (V : 558, 64, 7, 8, 9, 54, 7, VI : 551, 60, T. c. : 271, 2, 4, 5).

Clasa VI-a: Bereanu M. B. (VI : 544, 51, 4, 60, VIII : 370, T. c. : 244, 5, 71, 2, 4, 5).

Liceul „A. Lahovari“ Râmnicul Vâlcea.

Clasa VI-a: Andreescu I. (VI : 540, T. c. : 265), Mihăescu Fl. (VII : 460, T. c. : 264).

Liceul „Principele Nicolae“ Sighişoara.

Clasa VII-a: Deac C. (VII : 462), Tănăsescu N. (VII : 459, 65, 8, 9, 70, 1, 2).

Clasa VIII-a: Roşală Gh. (VIII : 360, 2, 70, T. c. : 264),

Liceul „Traian“ Turnu-Severin.

Clasa IV-a: Papuc G. G. (IV : 465, T. c. : 251), Terfeloagă G. N. (IV : 474).

Clasa V-a: Rovenţa I. C. (V : 552, 6, T. c. : 249).

Clasa VI-a: Corăci I. C. (VI : 551, 64*, 9, 70, T. c. : 264, 5, 7, 71, 2, 3, 4, 5), Filip G. (V : 554), Mihăescu G. (V : 554), Bedreag C. Ş. (T. c. : 243).

Clasa VII-a: Bengulescu C. A. (VII : 467, 76), Mihail I. G. (T. c. : 244, 5, 9, 50*, 1, 5*).

Liceul „Papiu Ilarian“ Târgu Mureş.

Clasa VIII-a: Ciortea I. Gr. (VIII : 340).

Liceul militar Târgu-Mureş.

Clasa IV-a: Buracu C. A. (IV : 465), Cristea N. N. (IV : 465), Enăchescu I. (IV : 464, 5, 74), Ionescu G. (IV : 464), Gâlceavă M. I. (IV : 456), Ionescu G. (IV : 464), Mihalcu I. (IV : 464, 5), Păläceanu V. (IV : 463, 5), Roşculeţ (IV : 480), Teodorescu C. (IV : 460).

Clasa V-a: Petrescu S. (V : 557).

Clasa VII-a: Anghelichi R. (VII : 470), Costache F. N. (VII : 470, T. c. : 241), Costin (VII : 468, 70, 1).

Clasa VIII-a: Paraipan N. C. (VIII : 360), Topalescu G. (T. c. : 255, 60, 2).

Liceul militar „N. Filipescu“ Târgovişte.

Clasa III-a: Ambrozie R. (III : 116), Ghiţă V. (III : 120), Marinescu M. (III : 121, 2), Popescu G. M. (III : 118).

Clasa IV-a: Balaban S. (IV: 473), Berberianu A. (IV: 473, VII: 470, 1), Coman G. (IV: 464), Făşie M. (IV: 464), Greculescu T. (IV: 464), Ilie G. (IV: 464), Iliescu C. C. (IV: 464, 74, V: 555), Ionescu Th. (IV: 464), Jurist V. (IV: 464, 73), Mităchescu P. (IV: 464), Onescu M. (IV: 473), Raşuchicea D. (IV: 455), Rudăreanu C. (IV: 464), Pompiliu P. (IV: 464), Tănăsescu (IV: 464).

Clasa V-a: Anastasescu I. Al. (V: 567), Atanasescu L. (V: 551, 67, 70), Brătăşanu C. (V: 546, 51, 67, 70), Barbiciu I. (V: 570), Bogacevschi (V: 570), Bunescu G. (V: 546, 51), Cristescu C. (V: 551, 65, 7), Columbeanu D. S. (V: 567), Ceauşelu E. (V: 546, 67), Dumitrescu D. (V: 565), Dobriceanu A. (V: 565, 70), Drăgulescu D. (V: 551, 6, 67), Iordănescu P. (V: 570), Ionescu F. B. (V: 546, 67), Filipidescu T. M. (V: 567), Marius Gheorghiu (V: 560, 5, 7, VII: 465, 8, 9, 70, 1), Mihuţu G. (V: 565, 7), Neagu M. (V: 546, 65, 7), Nicolaie Al. (V: 546), Nogacevski I. (V: 551, 5, 65, 7, 8), Părligros Tr. (V: 567), Percea I. M. (V: 567), Petrescu S. (V: 557, 61, 7, 70, VII: 471), Popa I. M. (V: 567), Popescu G. P. (V: 567), Săveanu G. I. (V: 570, VII: 465, 8, 9, 70, 1), Stoianovici Ş. (V: 558, 60, 5, 7, 8, 9, 70, VII: 469), Stroie R. G. (V: 567), Viecelli Al. (V: 565), Vlădoianu R. (V: 561, 5, VII: 469, 70), Vitănescu I. C. (V: 567, VII: 468, 9, 70, 1), Ţinculescu C. N. (V: 546, 67).

Clasa VI-a: Aldea V. (VI: 536, 49, 50, 1, 5), Arendt Em. (VI: 540, 7, 50, VII: 459, 64, 6, T. c.: 241), Brătănescu G. (VI: 551), Hristescu I. I. (VII: 462).

Clasa VII-a: Andronescu I. T. (VII: 483), Bărbulescu V. (VII: 483), Bestoiu N. (VII: 483), Boeru Al. (VII: 469, 70, 1), Butcă S. V. (VII: 483), Ceauşelu C. (VII: 483), Chintescu (VII: 483), Constantin C. S. (VII: 456), Dragomir E. (VII: 460, 4, 76, 7, 83), Bârlea Suhăţeanu V. (V: 470, 6, 81, VIII: 370, T. c.: 240, 1, 3, 9, 51, 64, 5), Georgescu Fl. (VII: 483), Ghengaea V. (VII: 483), Lăcătuş V. (VII: 483), Lupoaie Fl. (VII: 483), Mândrescu An. (VII: 483), Marinescu N. (VII: 483), Mastero L. (VII: 483), Popescu Lenin (VII: 468, 9, 70, 1, 83), Şerban C. (VII: 459, 83, T. c.: 251), Şerbănescu St. (VII: 483), Stănoiu R. (VII: 483), Vijelie Eug. (VII: 483, T. c.: 243, 4, 5).

Clasa VIII-a: Bogza A. (VIII: 358, 60), Gheorghiu S. G. (VIII: 358, 68*), Stoenescu M. (VIII: 306*, 59, 60*, 2, 4*, 8*, 70), Staicu I. N. (VIII: 351*, 62, T. c.: 241, 4).

Liceul „Dragoş Vodă" (nu se menţionează oraşul).

Clasa V-a: Kökényesdy D. (V: 546, 68).

— La problemele (V, 568) şi (V, 554) s'au mai primit şi 18 rezoluţii anonime.

— O parte din soluţiile primite nu au fost cercetate şi vor fi anunţate în numărul următor; iar altă parte nu au fost luate în seamă nefiind redactate conform instrucţiunilor anunţate pe coperta fiecărui număr. S'au mai primit şi soluţii care au dovedit că au fost copiate una după alta; însă nu au fost luate în consideraţie.

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iulie 1940

Clasa III-a. *Exerc. 127.* Un trapez isoscel are baza mică $\sqrt{3}$, înălțimea $\frac{3}{2}$ și diagonala bisectoare a unghiului alăturat bazei mari. Să se afle aria cercului circumscris. C. I. B.

III. 128. In triunghiul ABC dreptunghic în A, fie AD înălțimea pe BC. Să se demonstreze relațiile:

$$\overline{AD} \cdot \overline{AB} = \overline{BD} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{DC} \cdot \overline{AB}.$$ N. M.

III. 129. Fie triunghiul echilateral ABC înscris în cercul O și a cărui arie este 20,76 cm². Se duc tangentele în A și B. Se cere:

1°. Aria cuprinsă între tangente și arcul AB;

2°. Laturile triunghiului echilateral și exagonului regulat circumscrise cercului.

E. M.

III. 130. Intr'un cerc O cu raza de 6 cm se ia un sector AOB al cărui unghiu la centru este de 60°. Să se construiască exact, pe cale grafică, un cerc a cărui suprafață să fie cât a sectorului AOB.

V. Gh.

III. 131. In semicercul (O), cu diametrul $\overline{AB}$, luăm coarda AM egală cu raza lui și prelungim diametrul AB cu segmentul BC egal deasemenea cu raza semicercului (O). Din C ducem tangenta $\overline{CT}$ la semicercul (O) și fie N și P punctele de intersecție ale perechilor de drepte (AM, CT) și (BM, OT).

1°. Să se calculeze lungimea tangentei CT și să se deducă că această tangentă este paralelă cu BM. Să se deducă deasemenea că dreapta NP trece prin mijlocul segmentului AC.

2°. Să se deducă apoi că punctul P este punctul de întâlnire al medianelor triunghiului ANC.

3°. Să se arate că aria cercului TNMP este jumătate din aria semicercului dat (O).

4°. Alte proprietăți interesante ale figurii. O. N. Ț.

Clasa IV-a. *Exerc. 492.* Scadenţele a două efecte sunt la 15 Septembrie şi 1 Octombrie ale aceluiaşi an. Se scontează al 1 Iulie cu $10^0/_0$ încasându-se 10.529 lei. Să se afle valorile lor nominale ştiind că diferenţa lor este de 3600 lei.

C. I. B.

IV. 493. Ştiind că asupra vânzărilor efectuate de un negustor fiscul percepe un impozit de $6^0/_0$, primăria o taxă de $2^0/_{00}$, iar aviaţia o taxă de $4^0/_{00}$, să se afle ce vânzări a efectuat un negustor, care a plătit drept taxe şi impozit suma de lei 792.

A. A. R.

IV. 494. Doi biciclişti pleacă în excursie din localitatea A la ora 6, cu viteza 20 km pe oră. La ora 7 şi 30 minute, unul din biciclişti observă că-i lipseşte pompa şi se întoarce înapoi. După ce o găseşte îşi măreşte viteza cu 10 km pe oră şi îşi ajunge tovarăşul la ora 8 şi 30 minute. Să se afle la ce depărtare de A a pierdut pompa.

E. M.

IV. 495. Fie două plane paralele P şi Q, iar în planul P două segmente egale $\overline{AC} = \overline{BD}$, care se taie în punctul O. Fie A', B', C', D' mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA. Perpendicularele în A', B', C', D' pe planul P înţeapă planul Q în A_1, B_1, C_1, D_1 respectiv.

Să se calculeze:

1°. Aria totală şi volumul prismei $A'B'C'D'D_1C_1B_1A_1$;

2°. Ariile secţiunilor $A'A_1C_1C'$, $B'B_1D_1D'$, $A_1D_1C'B'$.

Aplicaţie în cazul când:

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 6{,}12 \text{ m},$$

iar distanţa planelor P şi Q egală cu 4,2 m.

O. N. Ţ.

IV. 496. Fie două plane P şi Q aşezate oricum, iar în planul P două segmente egale $\overline{AC} = \overline{BD}$, care se taie în un punct O; apoi A', B', C', D' respectiv mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA.

Perpendicularele în A', B', C', D' pe planul P înțeapă planul Q în punctele A_1, B_1, C_1, D_1 respectiv.

Să se arate că dreptele A_1C_1 și B_1D_1 au direcții respectiv perpendiculare pe dreptele B'D' și A'C'.

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 580.* In triunghiul dreptunghic ABC, fie AD înălțimea pe BC. Să se demonstreze relația

$$\overline{BD^2} \cdot \overline{AC^2} + \overline{DC^2} \cdot \overline{AB^2} = 4S^2.$$

N. M.

V. 581. Două cercuri concentrice (O) și (O') cu razele R și $\frac{3R}{5}$. B fiind un punct pe cercul (O), tangentele duse din B la (O') taie cercul (O) în A, C. Tangenta dusă din C la (O') taie dreapta AB în A_1. Să se calculeze $\overline{AA_1}$.

C. I. B.

V. 582. Fie ABCD un patrulater înscris într'un cerc și M punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD. Se duce un cerc C_1 arbitrar prin punctele A, C și la fel un cerc C_2 prin B, D. Să se arate că secanta comună a cercurilor C_1 și C_2 trece prin M.

G. D. S.

V. 583. Pe un cerc se iau nouă puncte echidistante, care unite în mod convenabil formează trei poligoane de nouă laturi: unul *convex* și două *stelate*.

Să se arate că între laturile acestor poligoane avem relația:

$$l_3 = l_2 + l_1.$$

G. G. C.

V. 584. Pe axele perpendiculare OX, OY se dau punctele fixe A, B. Fie M un punct mobil pe OB și N intersecția lui OX cu paralela din B la AM. Se complectează dreptunghiul MONP, a cărui suprafață se cere să se arate că e constantă oricare ar fi M.

Gh. B.

V. 585. Se dă ecuația :

$$x^2 + (3 - 2\lambda)\, x + 1 - \lambda = 0.$$

1°. Să se arate că în general există două valori ale lui λ astfel ca raportul rădăcinilor să fie un număr dat k.

2°. Să se determine valorile lui k pentru care cele două valori ale lui λ se confundă.

G. D. S.

V. 586. Să se studieze natura rădăcinilor ecuației :

$$(2m - 1)\, x^4 - (2m + 3)\, x^2 + (m + 3) = 0$$

m fiind un număr arbitrar.

E. M.

V. 587. Să se determine λ astfel ca rădăcinile ecuației

$$\frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} = \lambda - 1$$

să satisfacă relația :

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2^2 = 1.$$

E. M.

V. 588. Să se arate că, dacă între numerele a_1, a_2, a_3 avem relația :

$$a_1 a_2 - a_1^3 - a_3 = 0,$$

ecuația :

$$x^4 + 2a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

este rezolvabilă cu ajutorul ecuațiilor de gradul al doilea.

Să se discute natura rădăcinilor.

O. N. Ț.

V. 589. Să se arate că, dacă între numerele a_1, a_3, a_4 avem relația $a_3^2 - a_1^2 a_4 = 0$, ecuația :

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

este rezolvabilă cu ajutorul ecuațiilor de gradul al doilea. Aplicație :

$$a_1 = \pm 3 \quad , \quad a_2 = k \quad , \quad a_3 = \pm 12 \quad , \quad a_4 = 16;$$

să se cerceteze dacă există valori pentru k pentru ca toate rădăcinile ecuației date să fie reale.

O. N. Ț.

Clasa VI-a. *Exerc. 569.* Să se arate că

$$3 + 2\cos 2x + 2\cos x$$

este patrat perfect; apoi să se rezolve ecuaţia:

$$2\cos 2x + 2\cos x = k,$$

unde k este un număr dat.

GH. B.

VI. 570. Pe cercul circumscris triunghiului ABC, dreptunghic în C, se iau punctele M şi N aşa că:

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN = \varphi.$$

Să se arate că MN păstrează o direcţie constantă, dacă AM şi AN sunt simultan interioare sau exterioare triunghiului ABC.

GH. B.

VI. 571. In extremitatea A a segmentului de dreaptă OA se ridică o perpendiculară pe care se iau cinci puncte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 astfel că unghiurile A_1OA, $A_2OA_1, \ldots, A_5OA_4$ să fie toate egale între ele şi egale cu 15^0. Să se demonstreze:

1^0. Că *două* din triunghiurile A_iOA sunt isoscele.

2^0. Că una din lungimile AA_i este *apotema* şi alta *latura* dodecagonului stelat înscris în cercul cu centrul în O şi cu raza OA_5.

GH. B.

VI. 572. Să se arate că între elementele unui triunghiu dreptunghiu avem relaţia

$$b^2(1 + \cos^2 B) - c^2(1 + \cos^2 C) = a^2 \sin(B - C).$$

N. M.

VI. 573. Să se arate că, în orice triunghiu, avem:

$$\Sigma\left[\frac{a^2 \sin(B - C)}{\sin A} + (b^2 - c^2)\cos^2 A\right] = 0.$$

N. M.

VI. 574. Să se rezolve un triunghiu oarecare, în care:

$$a = 2b \quad , \quad C = 60^0 \quad \text{şi} \quad R = 6 \text{ cm}.$$

E. M.

VI. 575. Se dă un triunghiu ABC înscris în cercul cu centrul O. Dreapta AO taie latura BC în A' şi cercul ABC în A".

a) Să se calculeze laturile triunghiului A'BA";

b) Să se găsească condiţia pentru ca ariile triunghiurilor BA'A", AA'C să fie egale.

C. I. B.

VI. 576. Un tetraedru are muchiile OA, OB, OC perpendiculare două câte două, lungimile lor fiind respectiv a, b, c. Proiecţiile lui O pe BC, CA, AB le notăm cu A', B', C'. Să se arate că volumul piramidei OA'B'C' este dat de formula:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 b^3 c^3}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}.$$

G. D. S.

VI. 577. Pe două drepte date în spaţiu se iau două segmente $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ de lungimi date. Să se arate că volumul tetraedrului ABCD rămâne constant atunci când segmentele date alunecă pe cele două drepte date.

G. G. C.

VI. 578. Să se construiască o sferă egal depărtată de cinci puncte date în spaţiu.

A. A. R.

Clasa VII-a. *Exerc. 493.* Să se execute epura unui grup de două corpuri, un cilindru şi un con circulare drepte. Baza cilindrului este în planul orizontal. Conul are înălţimea orizontală, se sprijină cu vârful său V pe o generatoare dată a cilindrului în mijlocul ei şi atinge planele de proiecţie în câte un punct. Date numerice în *mm*:

Centrul bazei de sus a cilindrului O (40, 80, 60); raza sa R = 20; generatoarea G este vizibilă, iar raza corespunzătoare face cu direcţia pozitivă a liniei de pământ un unghiu de 315°. Înălţimea conului $h = 70$; diametrul bazei sale egal cu înălţimea cilindrului.

V. Gh.

VII. 494. Să se studieze variația suprafeței corpului născut prin rotirea unui triunghiu dreptunghiu în jurul ipotenuzei, a cărei lungime este de 2 cm. Se va calcula suprafața în funcție de unghiul $B = x$.

E. M.

VII. 495. Se cere minimul expresiei

$$r_a^{\alpha} r_b^{\beta} r_c^{\gamma},$$

r_a, r_b, r_c fiind razele cercurilor exînscrise, într'un triunghiu variabil, circumscris unui cerc fix.

† N. BOTEA.

VII. 496. Se dau în epură punctele:

$$A(x, 3, 5) \ ; \ B(x, 1, 4).$$

Pe dreapta lor se consideră punctul $C(x, 4, y)$.

a) Să se reprezinte punctul C în epură.

b) Să se construiască centrul cercului circumscris triunghiului ABD, unde $D(x, 4, y+2)$.

C. I. B.

VII. 497. Se o axă OX, la 97 m de origină se găsește un mobil M ce pornește spre O cu 30 m/sec. având accelerația $+5$ m/sec^2. Când se află la 72 m de O mergând în sens pozitiv, un al doilea mobil N pornește, din origină, cu 60 m/sec. având accelerația 3 m/sec^2. Ambele mobile având mișcarea uniform variată se cere:

1°. Să se scrie ecuația mișcării mobilului M, luându-se ca origină a timpului momentul pornirii mobilului N.

2°. Să se determine punctele de pe axă unde au loc întâlnirile celor două mobile.

3°. Să se afle depărtarea maximă între cele două mobile, după ce s'au întâlnit prima dată.

4°. Câte momente sunt în care distanța între cele două mobile este o lungime dată a?

G. D. S.

VII. 498. Într'un cerc dat O se ia o coardă AB egală cu latura patratului înscris în cercul O, iar pe *arcul cel mare* un punct M. Să se studieze variația sumii tuturor înălțimilor triunghiului AMB.

O. N. Ț.

VII. 499. Să se găsească *maximul* sau *minimul* sumii medianelor unui triunghiu dreptunghiu a cărui ipotenuză este o constantă dată.

O. N. Ţ.

VII. 500. Intr'un patrulater ABCD diagonala AC este perpendiculară pe BD şi o împarte în două părţi egale.

Să se studieze variaţia *perimetrului* patrulaterului ABCD, când diagonala AC rămânând constantă ca mărime alunecă în lungul ei.

O. N. Ţ.

VII. 501. O stea circumpolară trecând la meridianul Bucureştilor are distanţa zenitală $51^{\circ}21'30''$. Să se afle distanţa zenitală meridiană la trecerea următoare la meridian.

C. I. B.

Clasa VIII-a. *Exerc. 382.* Intr'un cerc de rază R să se înscrie un triunghiu isoscel de perimetru $2l$. Să se discute.

Caz particular $R = 2$ cm, $l = 10$ m.

V. Gh.

VIII. 383. Fie M un punct în planul unei elipse ori hiperbole, cu axele OX, OY, de excentricitate e; P proiecţia lui M pe axa OX şi N intersecţia cu OX a perpendicularei din M pe polara lui; avem relaţia

$$\overline{ON} = e^2 \cdot \overline{OP}.$$

N. M.

VIII. 384. Fie $C(a, b)$ un punct în planul axelor rectangulare de coordonate în care se mai consideră şi parabolele de ecuaţii

$$y^2 = ax \quad \text{şi} \quad x^2 = by.$$

Să se arate că, D fiind al doilea punct de intersecţie al parabolelor, unghiul COD este drept şi să se găsească locurile geometrice descrise de punctele C şi D atunci când aria porţiei de plan interioară parabolelor este constantă.

G. G. C.

VIII. 385. Fie A, B două puncte comune unei elipse şi unei iperbole ce au aceleaşi focare. Tangentele în A, B la elipsă se întâlnesc în M, iar tangentele în A, B la iperbolă se întâlnesc în N. Se cere locul mijlocului segmentului MN când focarele se deplasează pe dreapta lor, punctele conicelor aflate pe această dreaptă rămânând fixe.

C. I. B.

VIII. 386. Se consideră o elipsă şi o iperbolă având aceleaşi semiaxe a, b, axele lor fiind suprapuse. 1°. O dreaptă dusă prin centrul lor comun taie elipsa în P şi iperbola în Q.

Să se determine această dreaptă astfel ca tangentele în P şi Q la curbele respective să fie perpendiculare între ele.

2°. Pe una din tangentele comune celor două curbe să se determine un punct M astfel ca tangentele duse din M la elipsă şi la iperbolă să fie perpendiculare între ele.

G. D. S.

VIII. 387. Fie A şi B două puncte fixe pe axele dreptunghiulare OX, OY şi M un punct mobil pe OY. Paralela din B la AM taie pe OX în N. Se complectează dreptunghiul MONP a cărui suprafaţă să se arate că este constantă.

GH. B.

VIII. 388. Fiind date în plan trei segmente OA_1, OA_2, OA_3, să se determine curba cea mai simplă care trece prin punctul O, şi împarte acele segmente în acelaşi raport dat:

$$\frac{\overline{OM_1}}{\overline{M_1A_1}} = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{M_2A_2}} = \frac{\overline{OM_3}}{\overline{M_3A_3}} = k.$$

Care este condiţia ca această curbă să fie cerc?

O. N. Ţ.

VIII. 389. Fie ecuaţia

$$x^4 + 4ax^3 - 4ax^2 + bx - \frac{a^2}{4} = 0$$

ale cărei rădăcini sunt abscisele punctelor unei axe, puncte ce formează o diviziune armonică. Să se exprime b cu ajutorul lui a.

C. I. B.

Toate clasele. *Exerc. 276.* Să se arate că oricare ar fi n întreg şi pozitiv, expresiunea

$$E \equiv 20736^n - 2^{2(3n+1)} \cdot 27^n + 6 \cdot 144^n - 2^{2(n+1)} \cdot 3^n + 1$$

este divizibilă cu *14641*.

V. GH.

T. C. 277. Să se arate că numerele de forma:

$$N \equiv \overline{79}\,\underbrace{99\ldots9}_{(n-3)\text{ ori}}\ \overline{88}\,\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{ ori}}\ \overline{59}\,\underbrace{99\ldots9}_{(n-1)\text{ ori}}$$

sunt cuburi perfecte şi să se găsească rădăcina cubică.

O. N. Ţ.

T. C. 278. Să se arate că numerele de forma:

$$N \equiv \overline{26}\,\underbrace{99\ldots9}_{(n-1)\text{ ori}}\ \overline{46}\,\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{ ori}}\ \overline{35}\,\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ ori}}\,\overline{2}$$

sunt cuburi perfecte. Care este cel mai mic cub perfect de această formă ?

O. N. Ţ.

T. C. 279. Să se arate că numărul

$$N \equiv 99999\ 6\ 00000\ 5\ 99999\ 8\ 00000\ 1$$

este divizibil cu produsul:

$$7^4 \times 11^4 \times 13^4 \times 37^4.$$

O. N. Ţ.

T. C. 280. Să se arate că numerele de forma:

$$N \equiv \underbrace{99\ldots9}_{n\text{ ori}}\ 6\ \underbrace{00\ldots0}_{n\text{ ori}}\ 5\ \underbrace{99\ldots9}_{n\text{ ori}}\ 8\ \underbrace{00\ldots0}_{n\text{ ori}}\ 1$$

sunt bipătrate perfecte.

O. N. Ţ.

T. C. 281. Se dau numerele 763, 367. Să se găsească baza de numeraţie în care scrise obţinem deasemenea două numere inverse. Cu câte cifre se scriu aceste numere în baza 2.

C. I. B.

ERATĂ. La Exerc. IV. 488 ultima ecuaţie este $7x - 8y = 2a + b$.

La exerciţiul *VI. 550, pag. 118* se înlocuieşte *2* din membrul al doilea prin $\frac{1}{2}$.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuș, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se vor scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . { pentru particulari . . Lei 200 / pentru abonații G. M. și S. G. M. Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . Lei 120

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M.O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ. — C. 62.885

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 8 1 MAI 1940

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAŢIUNII"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 8 — 1 MAI 1940

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa V-a. *Exerc. 544. Să se desvolte polinomul:*

$$P(x, y, z) = 2(x+y+z)^2(x^2+y^2+z) - 3(xy+yz+zx)^2$$

ţinând seamă că este funcţiune simetrică şi omogenă de x, y, z.

V. GH.

Desvoltarea lui $P(x, y, z)$ se poate obţine direct făcând calculele arătate. Este însă mai elegant a-l desvolta ţinând seamă că P este funcţiune simetrică şi omogenă ge gradul al IV-lea faţă cu x, y, z. Vom avea:

$$2(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2) - 3(xy+yz+zx)^2 \equiv k_1(x^4+y^4+z^4)$$
$$+ k_2(x^3y+xy^3+x^3z+xz^3+y^3z+yz^3) + k_3(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)$$
$$+ k_4(xyz^2+xy^2z+x^2yz).$$

Parantezele din partea a II-a exprimă toate combinaţiile simetrice şi omogene de gradul al IV-lea în x, y, z ce se poate avea.

Coeficienţii k_i îi obţinem dând valori particulare simple lui x, y, z.

Făcând

$$x = 1\ ,\ y = z = 0$$

găsim:

$$k_1 = 2.$$

Pentru

$$x = y = 1\ ,\ z = 0$$

găsim:

(1) $$2k_2 + k_3 = 9.$$

Pentru

$$x = y = z = 1$$

găsim:

(2) $$6k_2 + 3k_3 + 3k_4 = 21.$$

Pentru

$$x = y = 1 \ , \ z = -1$$

găsim:

(3) $$-2k_2 + 3k_3 - k_4 = -3.$$

Sistemul format de ecuațiunile (1), (2) și (3) ne mai procură:

$$k_2 = 4 \ , \ k_3 = 1 \ , \ k_4 = -2.$$

Inlocuind valorile celor 4 coeficienți, desvoltarea este obținută.

Despre simetrie și omogenitate în Algebră elevii sunt sfătuiți să citească un frumos și simplu articol întitulat *Simetrie, omogenitate* de TR. LALESCU, apărut în „Revista Matematică din Timișoara", Vol. III, pag. 83.

Clasa VI-a. *Exerc. 545.* Numărătorul se poate scrie:

$$1 + \sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$

$$= 1 + \sin x + \cos x + \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x}$$

$$= (1 + \sin x + \cos x)\left(1 + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) = (1 + \sin x + \cos x)\frac{\sin x \cos x + 1}{\sin x \cos x}$$

După simplificarea cu $(1 + \sin x + \cos x)$ expresia dată devine:

$$\frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos x} = \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos x} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos x}.$$

VI. 556. După condițiile enunțului vârful B se va găsi pe un cerc cu centrul în A', proiecția lui A pe plan. Trebuind să se găsească şi pe dreapta D se va găsi la intersecția lor. Unim unul din aceste puncte cu A şi avem cateta AB.

Punctul C se va găsi pe un cerc concentric cu primul, iar cateta AC va fi într'un plan perpendicular pe AB. Ducem aşa dar prin A un plan perpendicular pe AB. Acesta va tăia cercul al doilea în două puncte C, C'.

Deci punctului B îi corespunde 2 soluții, iar punctului B' alte două, în total 4 soluții.

Discuție. Dacă există soluțiile relative la B există şi cele relative la B', căci ele se pot aduce să coincidă printr'o rotire în jurul axului AA'.

Avem deci maximum 4 soluții. Putem avea numai două dacă B şi B' coincid, iar planul $\perp$ pe AB întâlneşte al doilea cerc. In sfârşit putem să nu avem nicio soluție.

G. D. S.

VI. 558. Fie $\overline{OC} = a$, iar $\overline{OA} = \overline{OB} = x$. Cum triunghiul OBA este dreptunghic isoscel, rezultă

$$\overline{BA}^2 = 2x^2,$$

iar

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 = x^2 + a^2 - ax$$

deoarece proiecția lui $\overline{OC}$ pe $\overline{OB}$ este jumătate din OC pentru motivul că unghiul BOC este de 60^0.

Triunghiul ABC fiind echilateral, rezultă că

$$x^2 + a^2 - ax = 2x^2$$

şi deci

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$\therefore \quad x = a\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

iar valoarea pozitivă

$$a\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

este într'adevăr latura dodecagonului rezultat convex înscris în cercul de rază a.

G. G. C.

Clasa VII-a. *Exerc. 463.* Notând paranteza cu y avem:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim \frac{9x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 5 - (\alpha^2 x^{2p} + 2\alpha\beta x^{p+1} + 2\alpha\gamma x^p + \beta^2 x^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma x)}{\sqrt{9x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 5} + \alpha x^p + \beta x + \gamma}$$

Dacă $p > 2$ atunci polinomul dela numărător este de grad $2p$, iar numitorul de gradul **p,** deci limita fracției este ∞.

Dacă $p < 2$ gradul numărătorului este **4,** iar al numitorului *2,* deci limita este tot ∞.

Va trebui să avem deci $p = 2$, iar la numărător să dispară termenii de gradul al IV-lea și al III-lea.

Condițiile vor fi:

$$9 - \alpha^2 = 0 \quad \therefore \quad \alpha = 3$$

și

$$-24 - 2\alpha\beta = 0 \quad \therefore \quad \beta = -4$$

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim \frac{-(10 + 6\gamma)x^2 + 8\gamma x + 5 - \gamma^2}{\sqrt{9x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 5} + 3x^2 - 4x + \gamma}.$$

Scoțând pe x^2 factor la numărător și numitor, simplificând și ținând seama că limita trebue să fie $\frac{7}{3}$ găsim:

$$-\frac{(10 + 6\gamma)}{6} = \frac{7}{3} \quad \therefore \quad \gamma = -4.$$

Deci $\alpha = 3 \; ; \; \beta = \gamma = -4.$

G. D. S.

Toate clasele. *Exerc. 242.* Un număr perfect este de forma:

$$2^n(2^{n+1} - 1) \quad \text{unde} \quad (2^{n+1} - 1) \text{ este prim.}$$

Vedem că:

$$2^{25} = 33\,554.432$$

deci avem ușor:

$$2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = 4096 \times 8191 = 33.550.336.$$

Prin urmare cel mai mic număr ce îl putem adăoga este 1.000.000.

I. L.

T. C. 247. Să se arate că avem:

$$3^{3^4 \cdot 3^2 \cdot 5} + 7^{2^4 \cdot 3 \cdot 5} + 11^{2^4 \cdot 3^2} + 13^{2^3 \cdot 3 \cdot 5} - 3 = \mathcal{M}.3.7.11.13.$$

I. L.

In enunț s'a publicat din eroare (-4) în loc de (-3), cum trebuia.

Soluția I-a. *Divizibilitatea cu 3.*

Avem:

$$E \equiv 3^{720} + (\mathcal{M}3 + 1)^{240} + (\mathcal{M}3 - 1)^{144} + (\mathcal{M}3 + 1)^{120} - 3 = \mathcal{M}3.$$

Divizibilitatea cu 7.

$$E \equiv 27^{240} + 7^{240} + 1331^{48} + (\mathcal{M}7 - 1)^{120} - 3$$

$$\equiv (\mathcal{M}7 - 1)^{240} + \mathcal{M}7 + (\mathcal{M}7 + 1)^{48} + (\mathcal{M}7 - 1)^{120} - 3 = \mathcal{M}7.$$

Divizibilitatea cu 11.

$$E \equiv 243^{144} + 16807^{48} + 32^{24} - 3$$

$$\equiv (\mathcal{M}11 + 1)^{144} + (\mathcal{M}11 - 1)^{48} + (\mathcal{M}11 - 1)^{24} - 3 = \mathcal{M}11.$$

Divizibilitatea cu 13.

$$E \equiv 27^{240} + 117649^{10} + (\mathcal{M}13 - 2)^{144} - 3$$

$$\equiv (\mathcal{M}13 + 1)^{240} + (\mathcal{M}13 - 1)^{40} + 16^{18} - 3$$

sau ne mai rămâne:

$$E \equiv (\mathcal{M}13 + 3)^{18} - 1 = 27^6 - 1 = (\mathcal{M}13 + 1)^6 - 1 = \mathcal{M}13.$$

Soluția II-a. Avem după teorema generalizată a lui FERMAT:

$$3^{\varphi(7.11.13)} - 1 = 3^{720} - 1 = \mathcal{M}(7.11.13)$$

$$7^{\varphi(3.11.13)} - 1 = 7^{240} - 1 = \mathcal{M}(3.11.13)$$

$$11^{\varphi(3.7.13)} - 1 = 11^{144} - 1 = \mathcal{M}(3.7.13)$$

$$13^{\varphi(3.7.11)} - 1 = 13^{120} - 1 = \mathcal{M}(3.7.11).$$

Luând trei câte trei, constatăm divizibilitatea cu câte un factor, al patrulea fiind însuși factorul.

I. L.

T. C. 260. Soluţia I. Ar trebui să avem:

$$x^4 - y^4 = 1940.$$

1. Fie x şi y pari, atunci:

$$(2\alpha)^4 - (2\beta)^4 = \mathcal{M}16.$$

2. Fie x şi y impari, atunci:

$$(2\alpha + 1)^4 - (2\beta + 1)^4 = \mathcal{M}16.$$

3. Fie x şi y de parităţi diferite, atunci:

$$\left.\begin{matrix}(2\alpha+1)^4 - (2\beta)^4 \\ (2\alpha)^4 - (2\beta+1)^4\end{matrix}\right\} = \mathcal{M}16 \pm 1.$$

Prin urmare 1940 nu poate să fie diferenţa a două bipatrate deoarece nu este nici $\mathcal{M}16$, nici $\mathcal{M}16 \pm 1$.

Soluţia II. Ar trebui să avem:

$$1940 = a^4 - b^4 = 2^2 . 5 . 97.$$

sau:

$$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = 2^2 . 5 . 97.$$

Dacă a şi b sunt de aceeaşi paritate, toţi factorii $(a - b)$, $(a + b)$ şi $(a^2 + b^2)$ sunt pari; dacă sunt de parităţi diferite, atunci cei trei factori sunt impari. Dar 1940 nu se poate descompune decât în produsele:

1 . 10 . 194	1 . 5 . 388	2 . 5 . 194
1 . 20 . 97	2 . 10 . 97	4 . 5 . 97

care nu sunt deodată toţi pari sau impari.

Prin urmare 1940 nu poate să fie diferenţa a două bipatrate.

I. L.

Până la 5 Aprilie s'au primit soluţii bune pentru exerciţiile publicate în n-rele 4, 5, 6 şi 7 anul VI, dela[1]):

Liceul „Carmen-Sylva" Bucureşti.

Clasa IV-a: Cristea D. Lambrina (IV: 469, 77), Roşu Gh. Glicheria (IV: 469).

Clasa VI-a: Georgescu N. Liliana (VI: 572*), Vasilescu O. Alexandra (VI: 566, 72*).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Clasa VII-a: Azimioară Şt. Fivi (VII: 480), Crăşoveanu Lucia (VII: 477, 8, 80, 1, 501), Dobrescu Emilia (VII: 480), Georgescu Diana (VII: 480), Haralamb Elena (VII: 480), Urseanu Otilia (VII: 480), Tone Aurelia (VII: 478, 80), Vasiliu Margareta (VII: 469).

Clasa VIII-a: Nissim L. Mioara (VIII: 357).

Şcoala Centrală de fete Bucureşti.

Clasa IV-a: Braslă Eliza (IV: 469), Cataţarei V. Andreia (IV: 477), Duţă Silvia (IV: 488), Laurian Mihaela (IV: 477, 8), Motaş Rodica (IV: 488), Niculescu Sanda (IV: 486, 8*, 9, 95), Nicolau Paula (IV: 488), Podeanu Lidia (IV: 477, 8), Posdărescu Ligia (IV: 477), Stoenescu Jeana (IV: 466, 78), Teodorescu C. Maria (IV: 481*, 6*). Teodorescu Viorica (IV: 477, 81), Ştefănescu M. Sanda (IV: 469, 71, 7), Zăgănescu Yvonne (IV: 477).

Clasa VI-a: Agapie G. Elena (VI: 562, 72*).

Clasa VII-a: Ionescu C. Marcela (VII: 459).

Clasa VIII-a: Ionescu Gh. Marcela Tatiana (VIII: 360).

Liceul „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa III-a: Agapie Gh. Paula (III: 128, IV: 493), Popescu Gh. Violeta (III: 110).

Clasa VII-a: Goldenberg L. Ada (VII: 472, 82).

Liceul „Notre Dame de Sion" Bucureşti.

Clasa IV-a: Odobeşteanu Francette (IV: 466).

Liceul Ortodox de fete din Bucureşti.

Clasa III-a: Mateescu Mihaela (III: 106, 7, 25, T. c.: 249, 51, 3).

Clasa VII-a: Maican I. Tuţi (VII: 461*, T. c.: 251).

Liceul de fete „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa IV: Mănescu Gh. Margareta (IV: 466).

Liceul de fete „Iulia Hajdău" Bucureşti.

Clasa IV-a: Cristescu N. Marioara (IV: 477, 81).

Clasa V-a: Dragomir M. Alice (V: 577).

Clasa VI-a: Iorga I. Aneta (VI: 552, 9, 60, 4), Stoia N. Silvia (VI: 547, 50, 1, 2, 7).

Liceul „Santa Maria" Brăila.

Clasa IV-a: Dimitriu H. Isabela (IV: 466, 77).

Liceul „Ortodox" Buzău.

Clasa VI-a: Jiletcovici Lia (VI: 559, 60, 3, 4).

Liceul „Teoretic de fete“ Bacău.

Clasa VI-a: Drimer Gretta (VI: 551, 9, 60).
Clasa VIII-a: Papadopol Demetra (VIII: 357).

Liceul Ortodox de fete „Elena Doamna“ Cernăuți.

Clasa IV-a: Ion I. Ștefania (IV: 466).
Clasa V-a: Enescu M. Florica (V: 556, 8, 9, 61).

Liceul „Domnița Ileana“ Constanța.

Clasa IV-a: Vasiliu Gh. Geta (IV: 466, 9, 77, 8, 9, 82, 4, 5, 6).

Liceul de fete „Elena Cuza“ Craiova.

Clasa IV-a: Bârsan Georgeta (IV: 479, 86*, 9*).

Liceul „Principesa Ileana“ Cluj.

Clasa VI-a: Manolache T. Elena (T. c.: 249, 51, 3).

Liceul de fete Focșani.

Clasa VIII-a: Gașnut Alexandrina (VIII: 354, 7).

Liceul „Oltea Doamna“ Iași.

Clasa VI-a: Lăbușca Elena (VI: 473).

Liceul „Notre Dame de Sion“ Iași.

Clasa IV-a: Barzach Sara (IV: 469, 93), Bronson Lia (IV: 477, 93), Cohn Lydia (IV: 472. 7), Cezarie Victoria (IV: 471), Cojocaru Ella (IV: 466), Cojal Estera (IV: 477), Figerhot Lia (IV: 474, 89), Haimovici M. Renée (IV: 469), Lăbușcă N. Elena (IV: 471), Marcovici Zisla (IV: 493, 4) Mihăilescu D. Alexandra (IV: 472, 9), Manase I. Sofia (IV: 466), Rosenfeld Rașela (IV: 466, 77, T. c.: 249), Solomon Etty (IV: 472), Zilberman Evelina (IV: 477), Waserman Mina (IV: 469).

Clasa V-a: Apter Lignc (V: 577), Mendlovits S. (V: 577), Weinstein Rita (V: 577).

Liceul „Oltea Doamna“ Oradea.

Clasa VII-a: Sony I. Edita (VII: 476), Weis V. Eva (VII: 476).

Liceul de fete Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VI-a: Dragomir Maria (T. c.: 249), Costea Ana (T. c.: 249).

Liceul „Carmen-Sylva“ Timișoara.

Clasa IV-a: Cloașe Constanța (IV: 477).

Clasa VI-a: Adler L. Edith (VI: 570, 1, 5, VIII: 364), Bakony C. Maria (VI: 545, 9*), Giurcăneanu E. Sanda (VI: 551, 64).

Clasa VII-a: Gall E. Lidi (VII: 477, 83, 8), Ionescu I. Lucia (VII: 477, 8, 80, 3, 90, 1), Leibovics Anie (VII: 469, 77, 8, 80, 8), Mardan Agir (VII: 470), Pleșa Ileana (VII: 478), Severineanu M. (VII: 468, 9, 70, 1, 2, 6).

Clasa VIII-a: Checianu Ana (VIII: 364, 6, 7, 75), Ungar D. Veronica (VIII: 360, 71).

Liceul de fete „Carabella" Târgoviște.

Clasa VI-a: Luca I. Elena (VI: 537, 47, 60, 4, VII: 472, VIII: 358).

Liceul „Aurel Vlaicu" București.

Clasa VII-a: Buga I. M. (VII: 461*, 3, 8, 9, 70, 1*, 6, T. c.: 251), Barbaiani I. (VII: 256, 62, 357, 8, 461*, 8, 9, 70, 1, 2, 6, T. c.: 248*, 9, 51, 3, 4).

Clasa VIII-a: Lipiceanu V. M. (VIII: 367), Munteanu Gh. (VIII: 367).

Liceul „Gh. Lazăr" București.

Clasa III-a: Șerban Gh. D. (III: 115, T. c.: 249).

Clasa IV-a: Alexandru S. (IV: 469, 88*), Iliescu-Brânceni B. (IV: 470, 1, 94, V: 580*), Ioan P. A. (IV: 486*).

Clasa V-a: Crișu A. (V: 555, 9, 60), Halpern E. (V: 577).

Clasa VI-a: Elias P. (VI: 563), Iliescu-Brânceni C. (VI: 563, T. c.: 260, 71, 4, 5).

Clasa VII-a: Frigator M. M. (VII: 459, 6, 7), Moscovici N. E. (VII: 472, 6, 7, 81).

Clasa VIII-a: Paul F. El. (VIII: 377, T. c.: 275), Teodoroff Șt. (VIII: 357*, 8).

Liceul „Matei Basarab" București.

Clasa III-a: Ieșan Șt. Al. (III: 109).

Clasa IV-a: Antonescu E. (IV: 477, 86, 93, V: 555, T. c.: 271). Adelstein L. (IV: 477, 93), Grigorescu P. R. (IV: 486), Hift C. Vlad (IV: 481, 93, T. c.: 271), Paplien S. S. (IV: 478. 86*, 9), Schurberg A. (IV: 477),

Clasa V-a: Buescu R. (V: 555, 60), Benjamin S. (V: 559, 76), Belizarie E. C. (V: 556), Chiriță D. D. (V: 556, 9, 61), Corigeanu R. (V: 571), Ghelber A. (V: 571), Negrescu I. S. (V: 556), Steinberg E. (V: 569, 71, 2), Saiovici E. (V: 545, 65, 77).

Clasa VI-a: Vasiliev A. B. (VI: 547, 50, 1, 2, T. c.: 249, 51, 64, 5, 71).

Clasa VIII-a: Popescu V. D. (VIII: 357, 71).

Liceul „M. Eminescu" București.

Clasa IV-a: Aman T. (IV: 477), Wolfsohn D. H. (IV: 466, 77).

Clasa V-a: Aron I. G. (V: 555, 6*, 8, 9, 60, 2, 3*, 5, VII: 468, 9, 70, 1, 2), Herschovici I. (V: 559), Zeclig Felix (V: 553, 9).

Clasa VIII-a: Leibovici S. (VIII: 350, 3, 72), Mateescu C. A. (VIII: 353), Savovici T. T. (VIII: 362, 71, 87).

Liceul „Mihaiu Viteazul" Bucureşti.

Clasa VI-a: Trestianu N. S. (VI: 545).

Clasa VII-a: Marcus B. (VII: 479, 80, 8, VIII: 370), Vernescu V. P. (VII: 476: 88).

Clasa VIII-a: Brezeanu C. (T. c.: 249, 51, 7, 8, 360), Niculescu T. (T. c.: 251, 358).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a: Antonescu N. M. (V: 555), Bejan P. M. (IV: 486), Dumitrescu F. D. (V: 562, 80*, 4), Gerota S. (IV: 473, 8, 86*, 93, V: 555), Ionescu D. (IV: 471, 3, 4, 9), Moracovici N. L. (IV: 478, 81), Misicu V. M. (IV: 477, 8*, 80, 1, 2, 3, 6, 93*, 4*, V: 558).

Clasa V-a: Fota E. (V: 587), Sorescu S. (V: 555, 8), Stoika V. (V.: 558, 962, 71, 80*, 3, 4), Ştefănescu P. C. (V: 555, 77).

Clasa VI-a: Botez V. R. (VI: 564*, V 550), Marinescu V. (VI: 549), Mihalache M. I. (T. c.: 249), Pastia C. (VI: 564*), Ştefănescu P. C. F. (V: 555, 77).

Clasa VII-a: Mihăileanu A. C. (VII: 465, 8, 9, 70, 1, 4, 6, 80, 559, VIII: 463), Peternelli Şt. P. (VII: 472, 4, 6).

Clasa VIII-a: Gârneţiu L. (VIII: 364, 75, 87), Ghiţescu M. (VIII: 357, T. c.: 249), Nicolaescu T. (VIII: 357, 8).

Liceul „Gh. Şincai" Bucureşti.

Clasa V-a: Constantinescu E. (V: 555, 9, 60, 1), Cristea P. (V: 555, 9, 60, 1).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa IV-a: Banc E. (IV: 485, 9), Bârlea I. S. (IV: 483*, 6*, 93, 4, 6), Carnabel Alex. (IV: 489) Dominic A. M. (IV: 486), Fizzoti V. (IV: 474, 88*), Ionescu D. D. (IV: 486), Ivanovici C. (IV: 477), Joga C. (IV: 469, 77, 89), Herişescu Al. (IV: 466, 86), Lazăr S. L. (IV: 471), Matei D. (IV: 477, 86).

Clasa V-a: Dumitrescu F. D. (V: 587), Teodorescu A. (V: 562, 77).

Clasa VI-a: Popescu Necşeşti A. (VI: 545, 7, 9*, 552).

Clasa VII-a: Alexandrescu M. (VIII: 468, 83, 5, 90, 1), Blanc H. E. (VII: 480, 90, 1), Bădescu N. A. (VII: 468, 88), Bănescu P. O. (VII: 468, 71, 2), Fotiade V. V. (VII: 477, 82), Georgian R. P. (VII: 488), Georgian D. (VII: 371, 5), Ghitnic R. (VII: 468, 9, 70, 1, 83, 5, 6, 90, 1, T. c.: 274, 5), Negrescu I. (VII: 488), Kamerling A. (VII: 466), Rohnfeld E. (VII: 477, 80, 1, 2, 3, 5, 91, T. c.: 275), Lupolover L. (VII: 471, 85, T. c.: 274), Moscovici I. Nestor (VII: 476, 80, 5, 8, 91), Mişu Şt. A. (VII: 480, 8), Mitache Al. (VII: 488), Petrini G. M. (VII: 472), Saront S. (VII: 471, 85), Zahareanu M. Ş. (VII: 475, 6, 7, 80), Weinberg E. (VII: 468, 85, T. c.: 271, 4),

Clasa VIII-a: Georgian D. (VIII: 371, 5), Gherasim E. (VIII: 353), Grigoriu A. D. (VIII: 353, 7, 87), Raconiceanu Gh. V. (VIII: 349, 58, 60), Solomon M. (VIII: 357, 62), Seibulescu A. C. (VIII: 343, 9, 62, 7, 8*).

Liceul „Titu Maiorescu" București.

Clasa IV-a: Albulescu N. (IV: 466, 9, 71*, 4, 8, 81*, 6*, 9, T. c.: 251), Orezeanu D. (IV: 486).

Clasa VII-a: Bugaievschi T. (VII: 480, 2, 5, 8, 91), Dobrescu T. (VII: 468, 70, 1, 88), Dolnescu T. (VII: 480, 5).

Clasa VIII-a: Boiescu M. (VIII: 367, 86), Călin I. (VIII: 357), Drăghicescu P. P. (T. c.: 269, 70*), Jiletcovici Al. (T. c.: 269), Şerbănescu V. (VIII: 357, 72, 86), Păscaru I. C. (T. c.: 269), Profeta S. A. (VIII: 364).

Liceul „Sft. Andrei" București.

Clasa VI-a: Ganea N. M. (VI: 543, 5, 7, 9*, 54).

Clasa VII-a: Juster M. (VII: 470, 83), Haid Ioseph (VII: 482, 3), Hoch I. A. (VII: 472, 6, 7, 80), Filiti Gr. (VII: 468, 9, 70, 1, 2, 6), Senchi M. E. (VII: 479, 80), Ştefanovici I. M. (VII: 462, 79, 80, 1, T. c.: 263), Vasilescu C. I. (VII: 462), Voiculescu N. C. (VII: 480), Weber F. (VII: 459, 62, 6, 8, 70, 1).

Liceul „Schewitz Thierrin" București.

Clasa VII-a: Mărgărit I. N. (VII: 480).

Liceul „Sf. Gheorghe" București.

Clasa VI-a: Andronic I. (VI: 542, 5, 7, 9, 51, 2, 9, 60, 2, 4, 9, 71, 4, T. c.: 250, 1, 64, 5, 74, 5).

Liceul „Profesorii Asociaţi" București.

Clasa VII-a: Marcusohn O. (VII: 463, 80, 5).

Liceul „Moise Nicoară" Arad.

Clasa V-a: Nistor I. I. (V: 549, 77, 80*), Popa T. (V: 562, 73, 7, 8).

Liceul „Ferdinand I" Bacău.

Clasa V-a: Iosipescu E. P. (V: 560).

Clasa VII-a: Dalban C. (VII: 469), Franck D. D. (VII: 488), Franck T. (VII: 468, 70, 1, 88), Racoviţă A. (VII: 461, 3).

Liceul „Codreanu" Bârlad.

Clasa VII-a: Atanasiu A. A. (VII: 478).

Liceul „Samuel Vulcan“ Beiuş.

Clasa VIII-a: Voştinariu Gh. (353, 4).

Liceul „Sft. Vasile“ Blaj.

Clasa III-a: Cişmaş C. (III: 117*), Macovei S. (III: 116).

Clasa IV-a: Balea I. (IV: 474, 86*, 559, V: 555, T. c.: 265, 9, 75), Cârnaţiu I. (V: 555).

Clasa VIII-a: Oprişa N. N. (VIII: 354, 8, 66, 7, 78, 83, T. c.: 271).

Liceul „Laurian“ Botoşani.

Clasa IV-a: Papadopol M. (IV: 471*, 4, 86*).

Liceul „N. Bălcescu“ Brăila.

Clasa VI-a: Udrea I. (T. c: 255).

Clasa VII-a: Chirculescu I. M. (VII: 468, 9, 70, 1, 2, 6).

Liceul „Dr. Meşota“ Braşov.

Clasa III-a: Dumitraşcu G. G. (III: 109).

Clasa IV-a: Iordan D. I. (IV: 486), Mosariu V. (IV: 486), Trandafirescu T. (IV: 469, 86).

Clasa V-a: Bleahu M. (V: 555, 9), Butnariu I. C. (V: 555, 60), Farcaş Şt. E. (V: 555, 60), Georgescu M. M. (V: 555, 9, 60, 1, 73), Goiceanu A. N. (V: 555, 9, 60, 73), Halmagiu A. M. (V: 560, VI: 557, 64), Hirschsfeld I. (V: 559, 60), Ionescu I. I. (V: 555, 9), Popa V. C. (V: 555), Popa V. V. (V: 555, 9).

Clasa VI-a: Andreescu C. I. (T. c.: 249, 51).

Clasa VII-a: Matei M. P. (T. c.: 241, 7, 9).

Clasa VIII-a: Băncilă I. A. (VIII: 358, 60, 87), Rosenzweig M. (VIII: 353, 4, 8, 65, 7), Ţenescu C. S. (VIII: 358).

Liceul Internat „Buftea“.

Clasa VI-a: Andreescu Gh. (T. c.: 241, 51), Popescu P. (VII: 462).

Clasa VIII-a: Cernescu G. (VIII: 357).

Liceul „Ştirbei Vodă“ Călăraşi.

Clasa VII-a: Rădulescu V. M. (VII: 476, 8, VIII: 370).

Liceul „D. Ştirbey“ Câmpina

Clasa IV-a: Catea G. (IV: 465), Belon N. (IV: 478), Heber A. (IV: 486), Moga M. (IV: 474).

Clasa V-a: Rădulescu M. N. (V: 577).

Clasa VII-a: Rottenstein S. (VII: 462).

Clasa VIII-a: Alexiu G. D. (VIII: 354), Lăzăroiu P. (VIII: 354).

Liceul „Ioniță Assan" Caracal.

Clasa III-a: Florescu A. I. (III: 113).
Clasa VI-a: Musceleanu I. V. (VI: 547, 9, 50, 1, 2, 9, 60).
Clasa VII-a: Gligor D. (VII: 463, 8, 9, 70, 1).

Liceul „Aron Pumnul" Cernăuți.

Clasa IV-a: Timotin Al. (IV: 469, 71*, 4, 81, V: 555).

Liceul militar Cernăuți.

Clasa III-a: Amarfi P. T. (III: 114), Anton M. (III: 114), Băcăneț V. (III: 114), Dorneanu L. (III: 114), Gavrilovici E. (III: 114), Mlești M. (III: 114), Prisecaru M. (III: 114), Răuțu I. (III: 114), Voinea Laurențiu (III: 114), Zigrea N. (III: 114).

Clasa IV-a: Căpriță I. (IV: 488, 9), Cihoschi V. (IV: 477), Cimbru M. (IV: 468, 9), Cortușan J. (IV: 477, 88, 9), Gajus T. (IV: 477), Guță I. (IV: 477), Hutul C. (IV: 477, 88, 9, 90), Iliescu R. (IV: 469), Nicolaescu T. I. (IV: 477), Popescu N. N. (IV: 477), Rizescu O. (IV: 477), Scurtu I. R. (IV: 477), Spirescu N. (IV: 477), Staicu C. (IV: 473, 7, 87, 8, 9), Teodorescu A. (IV: 477), Vasiliu G. (IV: 477), Vasiliu D. (IV: 487, 8, 9), Zuzuleac N. (IV: 477).

Clasa VI-a: Gheorghe I. M. (VI: 551, 60), Florea C. (VI: 553), Irimescu S. P. (VI: 559, 60), Ivan H. (VI: 538, 59), Nedelea I. (VI: 538), Topârceanu Gh. (VI: 538, 59), Vișan T. (VI: 538, 53, 9), Vlădescu Gh. (VI: 551), Zovati C. C. (VI: 560).

Clasa VIII-a: Alexandrescu C. (VIII: 354, 72, T. c.: 294, 54), Arabu A. I. (VIII: 358, 66, 71, 2, 8), Cârdeiu Gh. (VIII: 354, 72, T. c.: 249), Ciociu I. (VIII: 357), Dovgan O. Gh. (VIII: 354, 72, 8, T. c.: 249, 54, 60), Găleată D. (VIII: 372), Herescu D. C. (VIII: 366, 8, 87, 2), Ionescu D. S. (VIII: 354, 73*), Jaranete P. (VIII: 372), Ianculescu E. A. (VIII: 354, 72, T. c.: 249), Gviazdamorschi R. (VIII: 354), Măgeanu H. N. (VIII: 358), Moșu Iulian I. (VIII: 354), Pâru A. (VIII: 378), Popescu L. (VIII: 357), Paicu M. (T. c.: 249, 372), Pletea A. M. (VIII: 354, T. c.: 249, 54), Pavlovschi Șt. (VIII: 354, T. c.: 249), Rollea C. V. (VIII: 354, 72, 8, T. c.: 249, 54, 60), Țocu G. P. (VIII: 364, 6, 8, 70, 1, 2), Tofan M. (VIII: 378), Tutulan (VIII: 357, 8), Tofan G. M. (VIII: 372, 8), Stamate I. (VIII: 372, 8), Scurtu I. (VIII: 354, 72, 8, T. c.: 249), Vasiliu C. P. (VIII: 354, 78, T. c.: 249), Vasiliu I. P. (VIII: 372, 8), Walter P. (VIII: 358, 72), Vlădescu M. (VIII: 358).

Liceul Militar Chișinău.

Clasa IV-a: Bădescu Ș. (IV: 489), Grigoriu M. (IV: 469, 71, 4, 7, 84, 6, V: 555, T. c.: 274), Rusu I. (IV: 469, 71, 4, 86), Soroceanu N. (IV: 474).

Clasa V-a: Hârjeu Gh. (V: 577), Voicu Gh. (V: 562, 3, 5, 7).

Clasa VI-a: Cristea C. (VI: 545, 50, 1, 2, 7, 60, 3, 4*).

Clasa VII-a: Bârsan C-tin (VII: 470, 2), Moldoveanu D. (T. c.: 251), Popescu S. (VII: 476).

Liceul „Gh. Barițiu" Cluj.

Clasa IV-a: Domilescu E. (IV: 555).

Liceul „Alecu Russo" Chișinău.

Clasa IV-a: Suruceanu R. (IV: 475, 6).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanța.

Clasa VI-a: Sotiriu T. (VI: 545, 50, 1, 2, 9, 60, 4).

Liceul de aplicație al „Școalei Normale Superioare" Cluj.

Clasa VII-a: Marinescu P. (VII: 472).

Liceul „Frații Buzești" Craiova.

Clasa IV-a: Marian M. D. (IV: 479).

Colegiul Național Craiova.

Clasa VIII-a: Petrulian P. (VIII: 354).

Liceul Militar Craiova.

Clasa IV-a: Braniște C. (IV: 477, 89), Călinescu N. (IV: 477, 81, 8, 9), Constantinescu N. (IV: 477, 81, 9), Constantinescu Șt. (IV: 481, 9), Cioroianu C. (IV: 466, 77, 81, 8, 9 V: 559), Muscurel C. (IV: 481), Marian M. D. (IV: 466, 9, 77), Negruș B. (IV: 477), Nicolaescu N. (IV: 466, 77, 9), Pârvan I. (IV: 473, 81, 8, 9), Pănace I. (IV: 477), Udrea C. I. (IV: 479, 81, 8, 9, 90).

Clasa V-a: Anchescu C. M. (V: 559, 65, T. c.: 251), Botezatu Tr. (V: 567, T. c.: 249, 51), Băldescu V. (V: 559, 60, 7, 77, T. c.: 249), Bădescu F. (T. c.: 249, 51), Bogdănescu N. (V: 571, 7), Constantinescu C. (V: 567, T. c. 249), Coșereanu I. C. (V: 559, 65, 7), Dascălu Ș. (V: 565, 7, 77), Dogaru Gr. D. M. (V: 561, 5, 77, T. c.: 249), Dinculescu N. (V: 559, 77), Duduță Tr. (V: 559, 65), Fărtățescu I. C. (T. c.: 251), Ghinea M. (V: 559, 61, 7, T. c.: 249, 51), Hurezeanu M. (V: 559, 61, 5, T. c.: 249), Iacobescu G. I. (V: 567), Ionașcu Fl. (V: 559), Ismană G. M. (V: 567), Marinescu I. (V: 559, 65), Mareș Al. Em. (V: 559), Marincea D. I. (V: 567, T. c.: 249), Miresçu Tr. (V: 567), Oprescu M. (V: 546, 59, 67, 71, 7), Popescu M. (V: 565, T. c.: 249, 51), Marinescu M. (V: 567), Pretorian Mir. (V: 567), Păsărică V. (V: 565, 7, 77), Polizu Al. Al. (V: 561, 7, 71, T. c.: 249, 51), Preda Gh. V. (V: 559, 67, T. c.: 249), Păsoi M. (V: 559), Procopie N. (V: 559, 65), Rujea M. Ion (V: 559, 61, T. c.: 249), Sbenghe M. (V: 559), Zamfir M. M. (V: 567, T. c.: 249).

Clasa VI-a: Băcanu C. (T. c.: 249), Constantinescu A. (VI: 565), Mateescu A. (VI: 545, T. c.: 255), Teodorescu V. (VI: 549), Tomescu S. (T. c.: 251), Zaharia S. (VI: 557).

Clasa VIII-a: Constantinescu G. (VIII: 343).

Elevi particulari Brăila.

Clasa VII-a: Cotariu D. M. (VII: 461, 77*, 80, 3, 5, VIII: 357, 71, T. c.: 247*, 8*, 50), Făinaru L. I. (VII: 480).

Liceul „Unirea" Focșani.

Clasa VII-a: Foga A. C. (VII: 461, 3, 5).

Clasa VIII-a: Baruch M. (VIII: 362, 4, 6, 71, 87), Nicoară T. (VIII: 372, 4, 5, 83, 4, 7).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VII-a: Călugăreanu Al. (T. c.: 249, 51), Marinescu T. N. (VII: 472, 80), Petrescu R. Gh. (470, 5, 6, 81, 3).

Liceul „Național" Iași.

Clasa V-a: Nacht H. S. (V: 562, 76, 7, 87).

Clasa VI-a: Buchman Gh. D. (VI: 530, 47, 51, 4).

Clasa VII-a: Hateș D. L. (VII: 488), Secu A. E. (VII: 459, 65, 8, 9, 70, 1, 2).

Clasa VIII-a: Sraihman S. S. (VIII: 353, 7, 8, 71).

Liceul Internat „C. Negruzzi" Iași.

Clasa VI-a: Manolache T. (VI: 547, 52, 9, T. c.: 252), Rubinschi M. N. (VI: 550, 74).

Liceul militar Iași.

Clasa III-a: Brighiu C. (III: 106, 7), Burlibașa G. M. (III: 106), Dimitriu M. (III: 106, 7), Edu E. (III: 106, 7), Mihăilescu Șt. (III: 106, 7), Neagoe B. (III: 106, 7), Păstoanu Ir. (III: 106), Vasilescu I. T. (III: 107).

Clasa IV-a: Andreescu M. M. (IV: 481, 8), Andrei G. A. (IV: 481, 8), Bosiceanu C. C. (IV: 481, 4, 8), Gane D. N. (VI: 488), Opran I. M. (IV: 488), Petrescu Al. (IV: 481, 5, 8), Turculeț D. T. (IV: 488, 90).

Clasa VI-a: Bogdan Gh. (VI: 560), Drăghicescu P. (VI: 545, 60, 1*, 2, 3, 7, 8, VII: 461*, VIII: 377, T. c.: 247*, 8*, 54, 71, 4, 5), Iacomi D. M. (T. c.: 249, 51, 3, 5), Pârlog I. (VI: 538, 45, T. c.: 249, 50, 1), Popa N. A. (VI: 543, 50, 1, 2), Romanescu C. (VI: 538, T. c.: 249, 50, 1), Zamfir C. I. (VI: 538, 43, 5, 9, 60, 1, 7, 8, T. c.: 251, 3, 5, 271, 4, 5).

Clasa VIII-a: Constantin Pantelimon (VIII: 362), Gheorghian L. L. (VIII: 360), Jiletcovici A. (VIII: 363, 5, 7, 9, 71, 2, T. c.: 271, 2, 5), Păscaru C. (VIII: 364, 70, 1, 2, T. c.: 271), Petrescu V. A. (VIII: 365, 6, 7, 71, 2, 7, 8, T. c.: 264, 5), Rohr I. Al. (VIII: 358*, 64, 5, 6, 70, T. c.: 271, 2, 4, 5).

Liceul „Aurel Vlaicu" Orăștie.

Clasa VIII-a: Borza I. (VIII: 354, 7, 60).

Liceul „Petru Rareș" Piatra-Neamț.

Clasa VIII-a: Soroceanu D. (VIII: 357, 71).

Liceul „I. C. Brătianu" Pitești.

Clasa V-a: Popescu Gh. M. (V: 565, 7).
Clasa VII: Tologeor G. S. (T. c.: 247, 8, 9, 51, 3, 4).

Liceul „Sf. Petru și Pavel" Ploești.

Clasa IV-a: Bellu Al. (IV: 479, 86), Constantinescu N. (IV: 471, 7, 81, 6), Dima Gh. C. (IV: 471, 81, 6*), Evghenide C. (IV: 477, 8, 9, 82, 4), Ghinea V. I. (IV: 481, 6), Iupcianu N. N. (IV: 467, 9, 72, 5, 7*, 8, 82, 5, V: 558, T. c.: 249*, 51*, 3*, 60), Priboi T. (IV: 469, 77), Vintilescu Gh. (IV: 469, 77, 86*).

Clasa V-a: Cătuneanu T. (V: 555, 8, 9, 77), Moțoiu C. (V: 555, 6, 9, 65, 77), Popovici A. (V: 562), Weitzman I. (V: 566, VII: 480, VIII: 367, T. c.: 249).

Clasa VI-a: Bereanu B. (VII: 480, VIII: 367, T. c.: 249), Pandelescu Gh. I. (547, 51).

Liceul „A. Lahovari" Râmnicul Vâlcea.

Clasa V-a: Geantă Th. B. (V: 578*, T. c. 269).
Clasa VI-a: Andreescu Gh. I. (VI: 543, 5, 6).

Liceul „Principele Nicolae" Sighișoara.

Clasa VIII-a: Roșală Gh. (VIII: 353, 7, 8, 63, 7, 71).

Liceul militar Târgu-Mureș.

Clasa IV-a: Blăjan C. (IV: 472, 7, 81, 6, V: 555), Cergău L. (IV: 477), Enăchescu I. (IV: 466, 8, 86), Gâlceavă I. (IV: 466), Mihalcu I. (IV: 477, 86), Petrescu I. N. (IV: 486), Roșculeț Alex. (477).

Clasa V-a: Mateucă Gh. Fl. (V: 568), Neamțu M. M. (V: 568).

Clasa VI-a: Baranga T. G. (VI: 564), Munteanu (VI: 564), Ordeanu M. (VI: 551), Rafiroiu R. (VI: 554), Vasilescu V. (VI: 554), Văduva D. (VI: 540), Vizireanu I. S. (VI: 551, 64).

Clasa VII-a: Anghelichi R. (T. c.: 248).

Clasa VIII-a: Bărbierul V. V. (VIII: 360), Topalescu Gh. (T. c.: 274, 5).

Liceul militar „N. Filipescu“ Târgoviște.

Clasa III-a : Balaban I. (III : 116, 21), Bulandra C. (III : 118*, 21, 2), Bejan E. Emil (III : 116), Chivulescu P. (III : 118, 21), Columbeanu P. (III : 116, 8), Chivulescu G. P. (III : 116), Costea N. Șt. (III : 121, 2), Demetrescu I. O. (III : 121), Dragomir C. (III : 121), Dombrovski C. (III : 118*), Dombrovschi T. (III : 116), Diaconu Alex. (III : 118*, 21), Frățianu A. L. (III : 118*, 21), Ghiță V. (III : 114, 5, 6, 9, 21, 2, T. c : 249), Ghenoiu V. (III : 116, 8), Ghenoiu L. (III : 116, 21), Gheorghiu I. C. D. (III : 121), Grigorescu S. (III : 121), Ioniță Șt. (III : 116, 8*, 21), Iliescu C. V. (III : 116, 21), Ionescu I. J. (III : 116), Ionescu G. M. (III : 116, 21), Ionescu A. (III : 116, 8), Ianculescu Gh. (III : 121), Lascar Gh. (III : 116, 8, 21), Lupoaie I. R. (III : 116, 21), Mândrescu M. (III : 118*, 21), Marinescu M. (III : 112, 4, 6, 21, IV : 461, V : 555, T. c : 249), Nicoară N. (III : 116, 21), Nae M. C. (III : 116, 21), Nisipeanu V. (III : 116), Pandele Șt. (III : 116, 8, 21), Poiană G. T. (III : 116), Pojogeanu I. M. (III : 116, 21), Popârțan (III : 116, 21), Popescu Gh. M. (III : 116, 21), Palade C. C. (III : 121), Pitiș L. N. (III : 121), Popescu Alex. (III : 121), Popescu I. Șt. Gh. (III : 121), Rădulescu M. C. (III : 116, 21), Simionescu P. (III : 116, 21), Stănescu I. (III : 118), Stănculescu Gh. (III : 116, 21), Soresgu Alex. (III : 121), Trandafir M. (III : 116, 8), Vârtejanu Gh. (III : 116, 7, 21, 2), Velican A. A. (III : 121).

Clasa IV-a : Balaban St. S. (IV : 469), Berbeian T. A. (IV : 469), Coman Șt. Gh. (IV : 482), Dinescu A. I. (IV : 477, 82), Ghiță M. V. (IV : 463), Ilie D. Gh. (IV : 482), Ilie C. (IV : 487), Jurist Gh. V. (IV : 477), Moscu T. (IV : 484), Marinescu C. M. (IV : 463), Oulescu M. (IV : 477, 82), Roșu D. (IV : 453, 77, 81, 2), Pacotă I. P. (IV : 482), Surlea I. (IV : 477, 82), Tănăsescu C. (IV : 482), Teodorescu V. (IV : 477, 82), Turtoescu D. (IV : 477), Tuas T. V. (IV : 482), Tintoescu M. L. (IV : 482), Voiculescu M. (IV : 464).

Clasa V-a : Barbaci A. I. (V : 551), Dobriceanu A. (V : 563), Gheorghiu M. (V : 520, 57, 62), Săveanu I. (V : 566).

Clasa VI-a : Aldea D. V. (VI : 545, 7, 60), Arendt. G. (VI : 535, 51, 3, 7, 60, 1, 3, VII : 471), Dumitrescu G. D. (VI : 564), Ionescu B. F. A (VI : 564), Negoițescu Al. (VI : 547, 64), Predoiu N. (VII : 483), Stamat A. (T. c. : 249), Vasilescu M. B. (VI : 547), Urseanu I. M. (VI : 545, 7, 9*).

Clasa VII-a : Bârlea-Suhățeanu V. (VII : 478, 9, 80, VIII : 357), Bârlea C. V. (T. c. : 255, 60, 74), Boeru A. (T. c. : 249), Chintescu M. (VII : 488), Ceaușelu C. (VII : 488), Dragomir A. (T. c. : 251), Ermin D. (VII : 480, 8), Georgescu C. F. (VII : 488), Lupoaia I. F. (VII : 488), Mândrescu T. A. (VII : 488), Predoiu P. N. (VII : 476, 83, 8), Șerban Const. (VII : 463), Vijelie E. (VII : 459, 60, 8, 9, 70, 1, 2, 6).

Clasa VIII-a : Buznea D. (VIII : 347, 57, 8, 60, 8, 9), Staicu I. N. (VIII : 354, 8, 66, T. c. : 251), Stoenescu D. Mirel (VIII : 347, 56, 7).

Liceul „Diaconovici Loga“ Timișoara.

Clasa IV-a : Iacob I. (IV : 473, 7, 8, 86, 90, 558).

Clasa V-a: Rădoi N. Nic. (V: 559).

Clasa VII-a: Boleanţu L. (VII: T. c.: 248, 9, 51), Bakonyi C. (VII: 367, 480, 2, 5, 8, 90, 1, VIII: 371, T. c.: 253, 4, 67, 8), Rinsky I. (VII: 480), Rusu I. (VII: 476, 7, 80, 1, 3).

Liceul „Sf. Haralambie" Turnu-Măgurele.

Clasa V-a: Caragea N. (V: 570, 1, 7), Tănăsescu Gh. N. (V: 558, 62, 9, 70, 1, 7).

Clasa VIII-a: Stoga D. M. (VIII: 357, 8).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa IV-a: Dumitrescu Gh. (IV: 474, T. c.: 249), George M. (VII: 465), Papuc Gh. (IV: 466, 77), Terfeloagă G. N. (IV: 471, 7).

Clasa V-a: Roventa I. C. (V: 569, T. c.: 249), Tănăsescu Gh. N-lae (V: 562).

Clasa VI-a: Coraciu I. C. (IV: 547, 9, 60, 72, 3, 4. T. c.: 247*, 8*, 59, 60, 2), Filip Gh. (VI: 547), Mihăescu S. Gh. (T. c.: 251).

Liceul „Tudor Vladimirescu" Târgu-Jiu.

Clasa VII-a: D. Bernardo P. (VII: 468, 9, 70, 1, 2).

Liceul „Kogălniceanu" Vaslui.

Clasa VIII-a: Lupan I. I. (VIII: 368).

Liceul „Barbu Delavrancea".

Clasa VII-a: Rosenberg I. (VII: 463).

Fără specificarea liceului.

Clasa IV-a: Stoenescu Jeana (IV: 464, 77), Bădescu D. Şt. (IV: 488).

S'au mai primit soluţii bune neiscălite; iar alte soluţii nu au fost luate în seamă nefiind redactate conform instrucţiunilor anunţate pe coperta fiecărui număr.

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Octomvrie 1940

Clasa III-a. *Exerc. 132.* In triunghiul isoscel ABC ($\overline{AB} = AC$) înscris în cercul O, $\overline{AB} = 13$ cm şi $\overline{BC} = 10$ cm. Se duc tangentele la cerc în B şi C, care se întâlnesc în M. Să se afle aria triunghiului MBC.

E. M.

III. 133. Fie A, B, C, D puncte situate pe un cerc de rază $\frac{5}{6}$, astfel încât

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \frac{1}{6}.$$

Să se calculeze lungimea $\overline{AD}$.

C. I. B.

III. 134. Intr'un cerc (O) de rază R = 35 m construiți un unghiu la centru AOB cu măsura de 60°. Apoi construiți cercul (I) tangent razelor OA, OB și tangent interior cercului O.

1°. Arătați că raza cercului I, înscris în sectorul de cerc AOB, este o treime din raza R a cercului (O).

2°. Calculați aria A cuprinsă între cele două cercuri (O) și (I).

3°. Arătați că această arie A este egală cu aria cercului concentric cu cercul (O) și trecând prin centrul I al cercului (I).

4°. Arătați că proprietatea este generală.

O. N. Ț.

III. 135. In cercul O de rază R = 32 mm construiți arcele BMC, CNA, APB de măsură egală cu 120°; apoi în segmentele de cerc BMC, CNA, APB construiți cercurile cele mai mari tangente arcelor și coardelor respective. Construiți deasemenea cercul înscris în triunghiul ABC și însemnați cu D, E, F punctele de contact cu laturile BC, CA, AB. In unghiurile A, B, C ale triunghiului ABC înscrieți cercurile tangente laturilor acestor unghiuri respectiv și tangente, în același timp, *cercului* DEF, așezate în interiorul triunghiului ABC.

Calculați aria cuprinsă între *cercul* O și *cercurile construite*. (Presupunând că am tăiat aria cercurilor construite).

O. N. Ț.

III. 136. Se dă dreptunghiul ABCD cu *lungimea* și *lățimea*, date după voie. Construind bisectoarele unghiurilor interioare ale dreptunghiului ABC și prelungindu-le, ele formează un patrulater A'B'C'D'. 1°. Demonstrați că prin vârfurile patrulaterului A'B'C'D' trece un cerc concentric cu cercul ABCD. 2°. Arătați că diferența ariilor

celor două cercuri concentrice ABCD şi A'B'C'D' este egală cu îndoitul ariei cercului descris pe segmentul, care este medie geometrică între lungimea şi lăţimea dreptunghiului ABCD, ca diametru.

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 497.* Un triunghiu echilateral ABC are pe AB, BC punctele D, E astfel ca:

$$\overline{AD} = 2\overline{DB} \ , \ \overline{BE} = 2\overline{EC}.$$

Să se calculeze:

$$\overline{DE} \ , \ \overline{AE} \text{ şi } aria \text{ AEC}.$$

C. I. B.

IV. 498. Se sapă o groapă în formă de con circular drept, cu raza bazei de 4 m şi adâncimea de 7,5 m. Pământul scos se aşează în jurul groapei în formă inelară având secţiunea un dreptunghiu cu înălţimea 2 m. Să se afle baza dreptunghiului de secţiune.

G. D. S.

IV. 499. Un turn înnalt de 14 m, are ca bază un cilindru şi e terminat cu un con; raza bazei este de 2 m şi volumul 125,600 m^3. Să i se afle aria laterală.

N. M.

IV. 500. Impozitele pe care un autor de cărţi de matematici le plăteşte anual, atât pentru cărţile vândute cât şi pentru cele nevândute sunt: 1% stat; 4% apărare naţională; 3,15% supracotă. Ştiind că fiscul a calculat un impozit de lei 11.410 considerând toate cărţile vândute şi cunoscând că echitabil ar fi fost să calculeze numai un impozit de 4890 lei cuvenit asupra cărţilor efectiv vândute, să se afle valoarea cărţilor nevândute şi a celor vândute de acel autor nedreptăţit de fisc.

A. A. R.

IV. 501. Să se afle perimetrul unui trapez dreptunghiu, a cărui arie este 26 cm^2, înălţimea 4 cm, iar diferenţa patratelor diagonalelor 39.

E. M.

IV. 502. Piramida SABC este astfel încât muchiile $\overline{SB} = \overline{SC} = l$, proiecția muchei SA pe planul ABC egală cu p, iar muchia $\overline{BC}$ astfel așezată încât punctele D și E, care o împart în trei părți egale

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC} = a,$$

sunt la aceeași distanță b de vârful A.

1°. Calculați volumul piramidei SABC.

2°. Calculați suprafețele *laterală* și *totală* a piramidei SABC, întrebuțând relația care dă suprafața unui triunghiu când îi sunt cunoscute laturile sale.

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 590.* Care este numărul căruia adăogându-i-se de *nouă* ori rădăcina sa patrată obținem 90.

A. A. R.

V. 591. Intr'un triunghiu dreptunghiu suma catetelor întrece cu 4 cm ipotenuza, iar înălțimea este de 4,8 cm. Bisectoarea unghiului drept taie, a doua oară cercul circumscris, în A'.

Pe $\overline{A'B}$ ca diametru se descrie semicercul BMA'. Se cere aria cuprinsă între arcul A'B și semicercul BMA'.

E. M.

V. 592. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{4}{5}, \quad \frac{x^2y^2}{x^2-y^2} = \frac{4}{3}.$$

E. M.

V. 593. Să se rezolve ecuația

$$(a^2 - 2ah + h^2 + b^2)x^2 + (2abh - 2bh^2 - a^2b - b^3)x + b^2h^2 = 0.$$

GH. B.

V. 594. ABCD fiind un patrat cu latura a, L și M puncte pe AB și BC, astfel în cât $\overline{AL} = \overline{BM} = b$, să se afle:

1. Lungimea segmentelor determinate pe MD de N, proiecția lui L pe MD;

2. Lungimea $\overline{LN}$;

3. Lungimile celorlalte înălțimi al triunghiului DLM.

C. I. B.

V. 595. Două drepte D_1 și D_2 sunt întâlnite de o a treia dreaptă D_3 respectiv în punctele A și B. Printr'un punct M al dreptei D_3 se duce o dreaptă care face cu D_2 un unghiu egal cu unghiul $(\widehat{D_1, D_3})$ și care întâlnește dreptele D_1 și D_2 în punctele C și D. Să se construiască punctul M astfel ca triunghiurile MAC și MBD să fie egale.

G. D. S.

V. 596. Se consideră un triunghiu ABC. Cercurile ce trec prin A și sunt tangente laturei BC respectiv în punctele B și C se întâlnesc din nou în P.

Dacă H este punctul în care se întâlnesc înălțimile triunghiului ABC, să se arate că punctul P se găsește pe cercul BHC.

† N. BOTEA.

V. 597. Fie semicercul (O) de diametru $\overline{AB}$. Construim unghiul la centru COA de măsură 120^0. Prelungim $\overline{OA}$ cu lungimea $\overline{AA'} = \overline{OA}$ și pe $\overline{OC}$ cu lungimea $\overline{CC'} = \overline{OC}$. Construim apoi cercul, cu centrul în A' și raza $\overline{A'B}$, care taie pe $\overline{A'C'}$ în D'. Arătați că:

1^0. Semicercul O este tangent segmentului A'C', punctul D de contact fiind mijlocul segmentului.

2^0. Segmentul $\overline{C'D'}$ este egal cu *raza cercului* I înscris în sectorul de cerc OADC (adică tangent razelor OA, OC și arcului ADC).

3^0. Calculați aria rămasă din semicercul O, după ce tăiem aria cercului I înscris în sectorul OADC.

O. N. Ț.

V. 598. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\ (x^2 + 3x + 2)}{(x + 5)\ (x^2 + x + 1)\ (x^2 - 6x + 9)} < 0.$$

C. I. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 579.* Să se rezolve prin geometrie elementară exercițiul *340*, căruia i s'a dat o soluție prin geometria analitică la pag. 159, *vol. VI* din *Gazeta Matematică, Supliment cu exerciții.*

GH. B.

VI. 580. Bisectoarele unui paralelogram formează un patrulater. Să se calculeze aria acestui patrulater în funcție de laturile paralelogramului și de unghiul diagonalelor.

C. I. B.

VI. 581. Să se rezolve ecuația:

$$1 + \sin x + 2\cos 2x + \sin 3x + \cos 4x = 0.$$

G. D. S.

VI. 582. Intr'o sferă de rază R se înscriu două conuri cu vârfurile în extremitățile unui diametru $\overline{AB}$ și având bazele într'un același plan perpendicular diametrului.

Se cere să se calculeze înălțimile conurilor, astfel ca suma volumelor lor să fie într'un raport dat față de volumul sferei al cărui diametru este înălțimea corespunzătoare.

G. G. C.

VI. 583. Piramida triunghiulară SABC este astfel că muchiile $\overline{SB} = \overline{SC} = l$, punctele D și E de pe muchia $\overline{BC}$, care o împart în trei părți egale — $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC} = a$ —, sunt egal depărtate de vârful A, anume $\overline{DA} = \overline{EA} = b$; iar unghiul fețelor SBC și ABC egal cu φ.

1°. Care este volumul piramidei SABC.

2°. Ce suprafață totală are acest corp geometric.

3°. Caz particular $\varphi = 60°$.

4°. Aplicație: $l = 540$ cm; $a = 102$ cm; $b = 102$ cm, $\varphi = 72°$.

O. N. Ț.

VI. 584. Două bare de metal $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ sunt articulate în B astfel că unghiul lor poate fi variat. Poate să fie determinat unghiul

lor astfel ca distanța dintre capetele libere A și C să fie egală cu suma proiecțiunilor obținute când proiectăm pe fiecare pe cealaltă în acea poziție? In caz de posibilitate să se dea un exemplu simplu.

O. N. Ț.

VI. 585. Un con circular este astfel încât o generatoare este înălțime. Lungimea acestei generatoare fiind G, iar raza cercului R, să se afle lungimea unei generatoare al cărei picior formează cu piciorul înălțimii un unghiu de 40^0.

C. I. B.

VI. 586. ω fiind centrul cercului lui EULER, să se calculeze suma:

$$\frac{\overline{A\omega} + \overline{B\omega} + \overline{C\omega}}{\overline{A'\omega} + \overline{B'\omega} + \overline{C'\omega}}$$

A, B, C fiind vârfurile triunghiului, iar A', B', C' fiind picioarele înălțimilor.

C. I. B.

VI. 587. I_a, I_b, I_c fiind centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC, iar ω centrul cercului lui EULER. Să se calculeze:

$$\frac{1}{\overline{\omega I_a}} + \frac{1}{\overline{\omega I_b}} + \frac{1}{\overline{\omega I_c}}.$$

C. I. B.

Clasa VII-a. *Exerc. 502.* Se dau două puncte A, B și dreptele D_1, D_2 paralele și egal depărtate de AB. Două drepte variabile Δ_1 și Δ_2 trecând prin A și B interceptează pe D_1, D_2 segmentele x_1, x_2. Să se calculeze maximul produsului:

$$P = x_1^m x_2^n.$$

C. I. B.

VII. 503. Să se reprezinte funcțiile

$$y = \frac{x^2}{1 - x^2} \quad \text{și} \quad y = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

pe același grafic.

N. M.

VII. 504. Să se calculeze suma seriei cu termenul general:

$$U_n = \frac{n+1}{n(n+3)(n+4)}.$$

C. I. B.

VII. 505. Să se reprezinte funcțiunea implicită y dată de

$$y^4 - x^2y^2 + x^4 = 0.$$

C. I. B.

VII. 506. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcțiunii

$$y = x^p \sin x \qquad (p > n).$$

C. I. B.

VII. 507. Să se calculeze derivata a doua a funcțiunii:

$$y = x^{\log_a x}.$$

C. I. B.

VII. 508. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x - \sin x}{\frac{x^6}{6!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^2}{2!} - 1 + \cos x}.$$

C. I. B.

VII. 509. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} [\sin 2x + \sin(x+a) - \cos(x-a)]^{\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

C. I. B.

Clasa VIII-a. *Exerc. 390.* Pe perpendiculara în M pe AB se ia punctul P așa încât

$$\overline{PA} = k \cdot \overline{MB}.$$

Se cere locul lui P știind că A, B sunt *fixe*, iar k este constant.

GH. B.

VIII. 391. Să se scrie ecuaţia cercurilor tangente parabolei

$$y^2 = 2px.$$

Să se afle locul centrelor lor atunci când raza este constantă.

G. G. C.

VIII. 392. Se dau două cercuri concentrice cu centrul O. Fie A punctul în care raza OB a cercului mare întâlneşte pe cel mic şi două puncte M, N pe cercul mare şi cel mic astfel ca arcele BM, AN să aibă lungimi egale. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului MN.

C. I. B.

VIII. 393. Se dau două cercuri C_1 şi C_2 tangente în origine axei OY, având razele r_1 şi r_2. Se cere:

1°. Coordonatele punctelor M şi N unde o dreaptă variabilă ce trece prin origine taie respectiv cercurile C_1 şi C_2.

2°. Să se arate că tangentele în M şi N la cercurile respective sunt paralele.

3°. Locul geometric al mijlocului segmentului $\overline{MN}$.

4°. Să se cerceteze dacă există pe axa OY vreun punct P astfel ca tangentele duse din P la C_1 şi C_2 (afară de axa OY) să facă unghiu de 45°.

G. D. S.

VIII. 394. $x'x$, yy' fiind axele de coordonate rectangulare, să se determine parabola cu axa $x'x$ axă de simetrie, cu yy' tangenta în vârf pentru care aria patrulaterului format de $x'x$, $y'y$, paralela dusă prin focar la yy' şi tangenta dusă în punctul M de întâlnire al parabolei cu această paralelă să fie $\frac{2}{3}$.

b) Oricare ar fi parametrul p tangentele duse în punctele M obţinute ca mai sus sunt paralele.

c) Polarele punctelor de întâlnire ale acestor tangente cu yy' faţă cu parabolele corespunzătoare sunt paralele.

C. I. B.

VIII. 395. Se consideră elipsele având ca axe de simetrie axele $x'x$, yy', de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \qquad (1)$$

Tangentele paralele cu o dreaptă Δ taie axa yy' în punctele M, M'. Dintre toate elipsele (1) având b constant, să se determine aceea pentru care $\overline{MM'}$ este minim.

C. I. B.

VIII. 396. Dându-se ecuația:

$$x^4+\sin\alpha\,.\,x^2+\operatorname{tg}\alpha\,.\,x+1=0$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sunt:

$$X_1=x_1+2x_2,\quad X_2=x_2+2x_3,\quad X_3=x_3+2x_4,\quad X_4=x_4+2x_1.$$

C. I. B.

VIII. 397. Pentru cele 6 rădăcini ale ecuației

$$x^6=a,$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$$

să se calculeze produsul

$$P=x_1\sqrt{x_2}\sqrt[3]{x_3}\sqrt[4]{x_4}\sqrt[5]{x_5}\sqrt[6]{x_6}.$$

C. I. B.

Toate clasele. *Exerc. 282.* Să se găsească un număr N, care adunat cu suma cifrelor să dea ca rezultat *1939*.

GH. B.

T. C. 283).* Dacă $n(N)$ reprezintă numărul divizorilor lui N, atunci avem:

$$n(1940^{13})-1=\mathcal{M}13.$$

I. L.

T. C. 284).* Dacă $s(N)$ reprezintă suma divizorilor lui N, atunci avem:

$$s(6^7) - s(6) = \mathcal{M}7.$$

I. L.

T. C. 285).* Dacă $p(N)$ reprezintă produsul divizorilor lui N, atunci avem:

$$p(2^7) - p(2) = \mathcal{M}7.$$

I. L.

T. C. 286. Care sunt numerele pentagonale de prima speță vecine lui *1940?*

I. L.

T. C. 287. Care sunt numerele pentagonale de a doua speță vecine lui *1940?*

I. L.

T. C. 288. Numărul *1940* poate să fie un număr piramidal cu baza triunghiulară?

I. L.

T. C. 289. In câte feluri se poate descompune un produs de *nouă* factori în *trei* produse de *trei* factori?

---

*) Soluțiile acestor probleme se pot obține direct, sau se poate aplica rezultatele din G. M. XXVI, pag. 59, 62 și 177.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuş, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se vor scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, însoţit de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluţiilor se pot vedea indicaţiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Ţiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică. Ediţia VI-a . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . { pentru particulari . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* Lei 140

XVII. **A G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

M.O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. — C. 63.837

1939-40

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 9 1 IUNIE 1940

C III R 28

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VI. No. 9 — 1 IUNIE 1940

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa VI-a. *Exerc. 562.* Notăm

$$\sphericalangle BAD = \alpha_1 \quad ; \quad \hat{DAE} = \alpha_2 \quad ; \quad \sphericalangle EAC = \alpha_3.$$

In triunghiul BAD avem:

$$\overline{AD}^2 = c^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2c \cdot \frac{a}{3} \cos B, \quad \text{însă} \quad a \cos B = c$$

aşa încât:

$$(1) \qquad \overline{AD}^2 = c^2 + \frac{a^2}{9} - \frac{2}{3} c^2 = \frac{a^2 + 3c^2}{9}.$$

La fel din triunghiul EAC deducem:

$$\overline{AE}^2 = \frac{a^2 + 3b^2}{9}.$$

1°. Triunghiul ADE ne dă:

$$\frac{a^2}{9} = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{AE} \cos\alpha_2 = \frac{a^2 + 3c^2}{9} + \frac{a^2 + 3b^2}{9}$$

$$- 2 \frac{\sqrt{a^2 + 3c^2}\sqrt{a^2 + 3b^2}}{9} \cos\alpha_2$$

$$\therefore \quad a^2 = 2a^2 + 3(b^2 + c^2) - 2\sqrt{a^4 + 3a^2(b^2 + c^2) + 9b^2 c^2} \cos\alpha_2$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{4a^4 + 9b^2 c^2} \cos\alpha_2 = 4a^2.$$

Ridicând la patrat:

$$4(4a^4+9b^2c^2)\cos^2\alpha_2 = 16a^4$$

$$\therefore \quad (4a^4+9b^2c^2)\cos^2\alpha_2 = 4a^4 \quad \text{sau:} \quad 9b^2c^2\cos^2\alpha_2 = 4a^4\sin^2\alpha_2$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{3bc}{4a^2} = \frac{3ah}{4a^2} = \frac{3h}{4a}.$$

2°. Triunghiul BAD ne dă:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\frac{a}{3}} = \frac{\sin B}{AD} = \frac{\sin B}{\frac{\sqrt{a^2+3c^2}}{3}} \quad \therefore \quad \sin\alpha_1 = \frac{a\sin B}{\sqrt{a^2+3c^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+3c^2}}.$$

Apoi:

$$\cos\alpha_1 = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+3c^2}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2+3c^2}{a^2+3c^2}} = \frac{2c}{\sqrt{a^2+3c^2}}.$$

Deci:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{b}{2c} \quad \text{şi analog} \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{c}{2b}.$$

3°. Verificarea se face din relaţia

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 90^0.$$

Deci

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = \infty$$

adică:

$$\Sigma \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = 1.$$

In adevăr avem:

$$\Sigma \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{b}{2c}\cdot\frac{3h}{2a}+\frac{3h}{2a}\cdot\frac{c}{2b}+\frac{b}{2c}\cdot\frac{c}{2b}$$

$$= \frac{3h}{4a}\,\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{1}{4} = \frac{3ha}{4bc}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$$

deoarece $ah = bc$.

G. D. S.

Clasa VIII-a. *Exerc. 348.* Din prima ecuaţie tragem uşor:

$$x = \sqrt[4]{-2i} = \sqrt[4]{2\left[\cos\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right]}.$$

Deci

$$x = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right)\right]$$

unde $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

Afixele celor patru rădăcini se pot construi cu complectă preciziune. Pentru modulul $\rho = \sqrt[4]{2}$ construim mai întâi segmentul $\sqrt{2}$, care este ipotenuza unui triunghiu dreptunghiu ale cărui catete sunt egale cu unitatea aleasă. Scriem apoi:

$$\sqrt{2} = m^2 + m^2$$

$$m^2 = (\sqrt{2})\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

ceea ce exprimă că m este media proporţională a segmentelor $\sqrt{2}$ şi $\frac{1}{2}$; ρ este ipotenuza triunghiului ale cărui catete sunt egale cu m.

Pentru argument împărţim arcul $\frac{3\pi}{2}$ în două părţi egale şi apoi jumătatea arcului iar în două.

2^0. Din ecuaţia 2-a tragem:

$$x^3 = \frac{25}{4i - 3} = \frac{25(4i + 3)}{(4i - 3)(4i + 3)} = 3 + 4i$$

$$x = \sqrt[3]{3 + 4i} = \sqrt[3]{5\left[\cos\left(2k\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(2k\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)\right]}$$

$$x = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(k\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right]$$

unde $k = 0,\ 1,\ 2.$

Afixele celor trei rădăcini nu se pot construi cu complectă preciziune. Nu se poate construi grafic modulul $\rho = \sqrt[3]{5}$. Pentru argument, construim întâiu arcul $\theta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, pe care apoi îl împărţim în trei părţi egale.

Pentru construcţiile grafice din această problemă să se cerceteze interesantul studiu *Probleme din vechime* de TR. LALESCU, Rev. mat. din Timişoara, vol. I, pag. 41.

V. GH.

Toate clasele. *Exerc. 269.* 1°. BB' *este bisectoarea interioară a unghiului* B. Fie M proiecţia lui C pe BD şi F intersecţia lui AC cu perpendiculara în E pe BD. Unghiul CDB fiind egal cu ABB' ca alterne interne este egal şi cu egalul său CBB'. Deci triunghiul DCB este isoscel, iar M este mijlocul lui DB. Cum prin construcţie

$$\overline{BB'} = \overline{DE}$$

rezultă că M este şi mijlocul lui EB' şi deoarece MC ∥ EF urmează că F este simetricul lui B' faţă de C, deci este fix.

Proprietatea nu se menţine atunci când E se ia pe prelungirea lui BD.

2°. *Se consideră bisectoarea exterioară* BB''. In acest caz punctul E' aşa ca $\overline{BB''}$ să fie egală cu $\overline{D'E'}$ se ia pe prelungirea lui $\overline{BD'}$. Se demonstrează întocmai ca la 1° că perpendiculara în E' pe BB'' trece prin simetricul lui B'' faţă de C.

GH. B.

Până la 10 Mai s'au primit soluţii bune pentru exerciţiile publicate în n-rele 5, 6, 7 şi 8 anul VI, dela[1]):

Liceul „Carmen-Sylva" Bucureşti.

Clasa IV-a: ENESCU RODICA (IV: 477).

Clasa VI-a: GEORGESCU LILIANA (VI: 566, 72*, 5, T. c.: 282).

Clasa VII-a: VASILIU MARGARETA (VII: 501, 3, T. c.: 282).

Clasa VIII-a: CONSTANTINESCU PAULA (VIII: 387), NISSIM MIOARA (VIII: 372*).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Liceul „Marica Brâncoveanu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Teodorescu C. Maria (IV: 493, 4*).
Clasa VI-a: Agapie G. Elena (VI: 581), Toni C. Ortansa (VI: 569).

Liceul „Iulia Hajdău“ Bucureşti.

Clasa V-a: Dragomir Alice (V: 574*, 6, 8).
Clasa VI-a: Stoia N. Silvia (VI: 558, 63, 70, 2*, T. c.: 270).

Liceul „Domniţa Ileana“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Vasiliu Georgeta (IV: 477).

Liceul Ortodox Bucureşti.

Clasa III-a: Mateescu V. Michaela (III: 127, 8, 31, T. c.: 282).

Liceul de fete „Aurel Vlaicu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Mănescu Margareta (IV: 477, 86*, 93).

Liceul „Sf. Maria“ Bucureşti.

Clasa III-a: Popescu Gr. Violeta (III: 116, 8*, 9*).

Liceul „Notre Dame de Sion“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Cotin G. Lydia (IV: 488), Ghimpeţeanu C. Colette (IV: 495).

Liceul de fete Bacău.

Clasa VIII-a: Papadopol Elena (VIII: 354).

Liceul „Sancta Maria“ Brăila.

Clasa IV-a: Dimitriu H. Isabela (IV: 493, 9*).

Liceul „Elena Doamna“ Cernăuţi.

Clasa III-a: Şcoba Raluca (III: 116, 21, 2).
Clasa V-a: Enescu Florica (V: 562, 3).

Gimnaziul „Oltea Doamna“ Cernăuţi.

Clasa IV-a: Baculinski V. Stela (IV: 496).

Liceul „Domniţa Ileana“ Constanţa.

Clasa IV-a: Vasiliu Gh. Geta (IV: 480, 93).

Liceul „Oltea Doamna“ Iași.

Clasa IV-a : Lăbușcă N. Elena (IV : 499*, V : 500, T. c. : 282).

Liceul „Notre Dame de Sion“ Iași.

Clasa IV-a : Cesariu C. Victoria (IV : 488), Wassermann Maria (IV: 498).
Clasa V-a : Mendlovits Șarlota (V : 590).

Liceul „Oltea Doamna“ Oradea.

Clasa VII-a : Lang I. Edita (VII : 477, 80, 3).

Liceul „Carabella“ Târgoviște.

Clasa VI-a : Leuca I. Elena (VIII : 360).

Liceul „Carmen-Sylva“ Timișoara.

Clasa IV-a : Severineanu C. Lucia (IV : 498*, 9*).
Clasa VI-a : Bakonyi C. Maria (VI : 550), Giurcăneanu E. Sanda (VI : 567).
Clasa VII-a : Gal E. Lili (VII : 480, 90), Ionescu I. Lucia (VII : 450, 99), Mang Ileana (VII : 480, VIII : 477), Mardan D. A. (VII : 475), Pleșa I. Ileana (VII : 490), Severineanu C. Maria (VII : 478, 80, 3), Ungar A. Viorica (VIII : 354).
Clasa VIII-a : Checian N. Ana (VIII : 372, 9).

Liceul „Titu Maiorescu“ București.

Clasa IV-a : Albulescu N. V. (IV : 488, 92, 3, V : 580*), Lengyel Al. (IV : 492), Poenaru Borda A. (IV : 493), Romanoski Vl. (IV : 493, 8, 9, 501).
Clasa VII-a : Bugaievski S. E. (VII : 477*, 83, 4), Dăscălescu St. M. (VII : 503), Dobrescu T. (VII : 468, 75, 7*, 91), Niculescu C. M. (VII : 480, 2*, 3).
Clasa VIII-a : Călin P. I. (VIII : 360, 72), Profeta S. Al. (VIII : 372, 83, 6, 7), Segal Z. I. (VIII : 360), Șerbănescu C. V. (VIII : 360).

Liceul „Mihaiu Viteazul“ București.

Clasa VII-a : Marcus B. (VII : 485, 90, T. c. : 265, 75), Vernescu P. (VII : 480, 503).
Clasa VIII-a : Brezeanu C. (VIII : 387), Nicolescu Th. (VIII : 360).

Liceul „Spiru Haret“ București.

Clasa IV-a : Fizzoti G. V. (IV : 488), Mateiu A. D. (IV : 488).
Clasa VII-a : Blană H. E. (VII : 499, 500), Fotiade V. (VII : 483), Ghitnic I. R. (VII : 503), Kronfild N. E. (VII : 480, 500, 1), Moscovici I. N. (VII : 475, 86, 90, 501), Mișu S. A. (VII : 496, 508, 9), Negrescu I. (VII : 468), Weinberg E. (VII : 504, 5), Zimbal M. (VII : 480).

Clasa VIII-a : Guralivu E. (VIII : 367), Grigoriu A. D. (VIII : 362, 77), Goldstein M. M. (VIII : 355, 60, 4), Marian S. (VIII : 367, 87), Mişu S. Al. (VII : 499, T. c. : 274, 5). Racoviceanu Gh. V. (VIII : 360, 3, 4, 5, 7), Şeibulescu A. C. (VIII : 365, 76).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa III-a : Şerban N. D. (III : 113, 4).
Clasa VI-a : Iliescu Brânceni C. (IV : 565*).
Clasa VII-a : Moscovici N. E. (VII : 480, 3, T. c. : 282).
Clasa VIII-a : Teodoroff St. (VIII : 387, 93).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a : Dimos Fl. (IV : 472, 8, 81, 6, V : 558), Dumitrescu F. D. (IV : 497, 8, 9*, 500, V : 590), Ionescu D. (IV : 477), Mişicu V. M. (IV : 477, 8, 80*, 1, 2, 3, 7, 9, 93*, 4, 500, V : 558, 71, 80, 90), Nicolau G. G. (IV : 481, 4, 6, 8, 9).

Clasa V-a : Paşcanu O. Vl. (V : 463*, 74*, 7, 83, 90), Soreşcu S. (V : 562, 3, 5, 77, 80, 90).

Clasa VI-a : Botez V. R. (VI : 572), Dumitrescu F. D. (V : 571), Marinescu I. V. (VI : 550), Milea G. P. (VI : 550).

Clasa VII-a : Ciurescu I. Fl. (VII : 478, 80), Mihăileanu A. C. (VII : 475), Peterneli St. P. (VII : 475*, 80, 3, 4, 504).

Clasa VIII-a : Gărneţiu I. L. (VIII : 362, 94, T. c. : 282), Ghiţescu M. (VIII : 372, 8, 9, 87, 90, 4, 5, T. c. : 265, 75, 82).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa III-a : Ieşean S. Al. (III : 112).

Clasa VI-a : Antonescu D. E. (IV : 477, 83, 8, 500, T. c. : 279), Costin A. M. (IV : 499*), Poplien S. (IV : 472, 3, 7, 8, 99), Schurberg Al. (IV : 489, 92, 3).

Clasa V-a : Buescu S. R. (V : 561, 7, 80, 4, 90), Ghelber Adr. (V : 590, T. c. : 265), Saiovici E. (V : 583, 90).

Clasa VI-a : Vasiliev A. B. (VI : 266).

Liceul „M. Eminescu" Bucureşti.

Clasa IV-a : Pascal I. M. (IV : 493, 9, 500), Sarf C. (IV : 492, 3, 500).
Clasa V-a : Aron I. G. (V : 566, 9, 70, 3, 7), Zelig F. (V : 577, 90).
Clasa VIII-a : Leiboviciu S. (VIII : 378, 86, 7, 90, 4, 5).

Liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa VI-a : Mănescu G. I. (IV : 561, 72*).

Clasa VII-a : Barbaiani A. I. (VII : 475, 7, 8, 80, 3, VIII : 360, 4. T. c. : 265), Buga I. M. (VII : 477, 80, 3, T. c. : 265).

Liceul „D. Cantemir“ Bucureşti.

Clasa VII-a: WEINTRAUB E. (VII: 483, 5).

Liceul „Gh. Şincai“ Bucureşti.

Clasa V-a: CONSTANTINESCU I. E. (V: 567, 70).

Liceul „Sf. Gheorghe“ Bucureşti.

Clasa VI-a: IANCU ST. AN. (VI: 557, 72, 6, T. c.: 268, 71).

Liceul „Sf. Iosif“ Bucureşti.

Clasa VII-a: VASILESCU P. I. (VII: 477, 8, 80, 3, 6, 8, 90, 1, 2, 503).

Liceul „Sft. Andrei“ Bucureşti.

Clasa VI-a: STEDACI I. A. (VI: 581).
Clasa VII-a: FILITI G. G. (VII: 475), JUSTER M. (VII: 480, T. c.: 265, 71), HAID J. (VII: 479), ORTENBERG G. E. (T. c.: 282), SERGHI M. E. (VII: 499, 500), ŞTEFANOVICI I. M. (VII: 499), WEBER F. (VII: 461).

Liceul „Schewitz Thierrin“ Bucureşti.

Clasa VI-a: FOLEA C. M. (VI: 554).

Liceul „C. Brâncoveanu“ Bucureşti.

Clasa VI-a: NADOLU GR. (VI: 550).

Liceul „Profesorii Asociaţi“ Bucureşti.

Clasa VII-a: MARCUSSOHN O. (VII: 501, 2, 5, 8).

Particular Bucureşti.

Clasa VI-a: EPURAN M. (VI: 550).

Liceul „Moise Nicoară“ Arad.

Clasa V-a: POPA T. T. (V: 571), NISTOR I. I. (V: 573).

Liceul „Sft. Vasile“ Blaj.

Clasa III-a: CISMAŞ O. (III: 113), MACAVEIU S. (III: 109, 13).
Clasa IV-a: BALEA I. (IV: 493, VI: 570, 8, T. c.: 274, 5).
Clasa VIII-a: OPRIŞA N. N. (VIII: 360, 7), SIMU N. (VIII: 360).

Liceul „Avram Iancu“ Brad.

Clasa IV-a: MIHUŢIU ADR. (IV: 457, 66, 93).

Liceul „Codreanu“ Bârlad.

Clasa VII-a: ATANASIU A. (VII: 485, 8).

Liceul „N. Bălcescu“ Brăila.

Clasa VII-a: CHIRCULESCU M. I. (VII: 475).
Clasa VII-a: (particular) COTARIU M. (VII: 488, 90, 1, 5, 9, 503*, VIII: 337, 67, 9, T. c.: 265, 71, 4), FĂINARU L. I. (VII: 477, T. c.: 275).

Liceul „Andrei Şaguna“ Braşov.

Clasa VII-a: BADEA A. I. (VII: 503, T. c.: 282).

Liceul „A. Meşota“ Braşov.

Clasa III-a: DUMITRAŞCU A. G. (III: 113, 4).
Clasa IV-a: DUMITRAŞCU A. O. (IV: 488), OUATU I. (IV: 486).
Clasa V-a: BLEAHU D. M. (V: 567), BUTNARU I. C. (V: 567), FLORICĂ ST. (V: 564, 71, 7), GEORGESCU M. (V: 558, 67), GOICEANU N. (V: 567), IONESCU I. (V: 567), PIŢIGOIU G. I. (V: 574*, 80), POPA C. (V: 567), POPA V. (V: 567), STELIAN F. (V: 580), VIŞA D. D. (V: 567, 8), VOINA I. (V: 580).
Clasa VI-a: HĂLMAGIU A. M. (VI: 550, 64).

Liceul „D. Ştirbey“ Câmpina

Clasa IV-a: CERNAT M. (IV: 486, 8), CATEA A. G. (IV: 486, 8).
Clasa V-a: RĂDULESCU N. (V: 563, 5, 71, 90).

Liceul „Ioniţă Assan“ Caracal.

Clasa VII-a: GLIGOR I. D. (VII: 475*).

Liceul „Ştirbei Vodă“ Călăraşi.

Clasa VIII-a: RĂDULESCU M. (VII: 480, T. c.: 265).

Liceul „Mitropolitul Silvestru“ Cernăuţi.

Clasa V-a: VOLSKI AL. (V: 564, 9).

Liceul militar „Ştefan cel Mare“ Cernăuţi.

Clasa III-a: IANA C. V. (VII: 128), ŞINTESCU V. M. (III: 128).
Clasa IV-a: CĂPRIŢĂ I. (IV: 493, V: 580), CIMBRU M. (IV: 493), MIHĂIŢĂ D. (IV: 493), RANGA C. (IV: 493), STAICU C. (IV: 475, 84, 93, 5, V: 573, 80, T. c.: 265), TĂNASE C. (IV: 493), VASILIU G. D. (IV: 486, 8, 9, 83, T. c. 265).

Clasa V-a: ARSINTEANU G. (V : 567), BUZNEA S. V. (V : 567), GAVRILESCU M. (V : 567), VASILIU G. D. (V : 531, 7, 80).

Clasa VIII-a: ARABU A. I. (VIII : 384), CÂRDEIU D. G. (VIII : 383, 7), DOVGAN V. G. (VIII : 383, 7), GĂLEATĂ D. P. (VIII : 383, 7), IANCULESCU I. A. (VIII : 387), IONESCU D. ST. (VIII : 387), JARANETE P. P. (VIII : 387), PÂRVU V. AD. (VIII : 387), PEICU M. (VIII : 387, T. c. : 276), ROLEA G. V. (VIII : 354, 83, 4, 7, T. c. : 271, 7, 8, 9, 10), RAICU M. (VIII : 354) SCURTU I. I. (VIII : 387, T. c. : 276), STAMATI I. I. (VIII : 383), TOZAN G. M. (VIII : 383, 7), ȚOCU G. P. (T. c. : 276), VASILIU D. P. (VIII : 383, 7).

Liceul „Alecu Russo" Chișinău.

Clasa IV-a: SURUCEANU E. N. (IV : 470).

Liceul Militar Chișinău.

Clasa IV-a: RUSSU V. I. (V : 571).

Clasa V-a: GHERMAN AL. (V : 567), GRIGORIU I M. (V : 571), HÂRJIU G. (V : 567, 73), VOICU G. (V : 585).

Clasa VI-a: CRISTEA C. (V : 554, 61, 6, 7, T. c. : 265, 74, 5), MIROSLAV T. (VI : 550, 4, 8, 84), VLAD H. (VI : 567).

Clasa VIII-a: TODIRICĂ V. C. (VIII : 383, 7), TOMA I. V. (VIII : 378).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanța.

Clasa VI-a: SOTIRIU H. T. (VI : 554, 5, 7, 8, 62, 3, 6, 7, 8).

Liceul „Frații Buzești" Craiova.

Clasa IV-a: DAN M. M. (V : 474), MARIAN M. D. (IV : 478, 81, 2, 4)

Liceul Militar Craiova.

Clasa IV-a: CĂLINESCU N. (IV : 493, V : 573, 80), CIOROIANU M. C. (IV : 480, 93), CONSTANTINESCU E. N. (IV : 488), MUSCUREL C. (IV : 488), POPESCU E. (IV : 488).

Clasa V-a: ANCHESCU C. (V : 567), BĂDESCU FL. (V : 577), CONSTANTINESCU C. (V : 567, 71), DUDUȚA TR. (V : 567), GHINEA N. M. (V : 565, 7), ISMANĂ M. (V : 571, 5), MARINCU I. (V : 568, 77), PREDA G. V. (V : 567), PRETORIAN M. (V : 577), PROCOPIE C. N. J. (V : 567, 71), RUJEA M. I. (V : 565, 7), VILAIA G. (VI : 567, 71).

Clasa VI-a: MATEESCU A. (T. c. : 267, 8, 72, 5), STĂNICĂ I. (VI : 557).

Clasa VII-a: GLOGOJAN M. (VII : 460*, 5, 83).

Clasa VIII-a: BĂRBULESCU G. (VIII : 358, 60), CONSTANTINESCU-VOICU D. G. (VIII : 353, 4, 64, 7, 87), PICA S. I. (VIII : 372, 87).

Liceul „Unirea" Focșani.

Clasa VIII-a: BARUCH T. (VIII : 356, 67, 72, 8, 86, 9, 90, 7, T. c. : 282), NICOARĂ T. (VIII : 390, 4, 5).

Liceul „Ion Maiorescu“ Giurgiu.

Clasa VII-a: Petrescu R. G. (VII: 499, 500, 4), Văduva F. M. (VIII: 370).

Liceul „C. Negruzzi“ Iaşi.

Clasa VI-a: Manolache C. Tr. (VI: 550, 72, T. c.: 265, 71, 4), Rabinschi M. N. (T. c.: 282).

Clasa VII-a: Balaban C. A. (VII: 495).

Liceul „Naţional“ Iaşi.

Clasa V-a: Nacht S. (V: 585).

Clasa VII-a: Secu A. Em. (VII: 475, 80).

Clasa VIII-a: Srailman S. (VIII: 360).

Liceul militar Iaşi.

Clasa III-a: Bogra N. (IV: 493), Brighiu C. (III: 130), Constantin V. (III: 130, IV: 493), Păstrăvanu C. T. (III: 127, 30), Sburlan D. N. (III: 127), Şova M. (III: 130, IV: 493).

Clasa IV-a: Ivan C. Z. (VI: 578).

Clasa VI-a: Bogdan Gr. G. (VI: 561, 7, 73, T. c.: 274, 6, 7, 8, 9, 80), Drăghicescu P. P. (VI: 572, 5, T. c.: 276 ,7, 8, 9, 80), Petrescu Al. (VI: 477), Popa N. A. (VI: 553, 3, 4, 7, T. c.: 274, 5), Zamfir C. I. (VI: 557).

Clasa VII-a: Pintilie I. I. (VII: 495, 6).

Clasa VIII-a: Gheorghiu P. (VIII: 383, 4, 7), Jiletcovici G. A. (VIII: 386, 8, 93, 9, T. c.: 276, 7, 8, 9, 80), Petrescu N. A. (VIII: 383, 4, 9), Potopeanu G. (VIII: 363, 83, 6, 9).

Liceul „Petru Rareş“ Piatra-Neamţ.

Clasa VIII-a: Soroceanu D. (VIII: 364, 72).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel“ Ploeşti.

Clasa IV-a: Bellu A. A. (IV: 488), Evghenadie C. C. (V: 571, 2, 90, 1), Ghinea V. I. (IV: 486, 93), Jupcianu N. N. (IV: 456, 76, 7, 83, 4, V: 569, T. c.: 265), Vintilescu G. (IV: 462, 89, 97, 8, 9).

Clasa V-a: Moţoiu Ş. C. (IV: 567), Weitzman I. (V: 575, 84, 5, 8, 90, VI: 550, 61, VII: 590, VIII: 364).

Clasa VI-a: Bereanu B. (VI: 550, 61, VII: 483).

Liceul „I. C. Brătianu“ Piteşti.

Clasa V-a: Popescu G. M. (V: 545, 63*, 4, 9, 70, 9, 88).

Liceul „Alex. Lahovari“ Râmnicul Vâlcea.

Clasa V-a: Geantă T. Bogdan (V: 590, T. c.: 264, 5, 82).

Clasa VI-a: Andreescu G. I. (VIII: 464).

Liceul „Principele Nicolae" Sighişoara.

Clasa VIII-a: Roşală Gh. (VIII: 367, 72).

Liceul militar „N. Filipescu" Târgovişte.

Clasa III-a: Ambrozie E. R. (III: 113, 31), Balaban E. (III: 112, 3, 7), Bejan E. (III: 113, 27), Bulandra C. (III: 113), Chivulescu P. (III: 113), Columbeanu Tr. (III: 109, 12, 3, 4), Corneliu N. (III: 113, 4), Costea Şt. (III: 113), Demetrescu O. (III: 113), Diaconu C. Al. (III: 113), Dragomir C. (III: 113), Florescu G. S. (III: 113), Frăţianu A. L. (III: 113, 4, 6), Gheorghiu I. C. (III: 109, 13), Ghiţă M. V. (III: 112, 3), Grigorescu I. S. (III: 113), Ianculescu G. (III: 113), Iliescu V. (III: 113), Ionescu J. (III: 113, 21, 7, 9), Ionescu G. Murgoci (III: 113), Ioniţă Şt. (III: 113), Lascăr G. (III: 113), Mândrescu M. (III: 113), Marinescu M. (III: 117), Mihalachioiu E. (III: 113), Nicoară P. N. (III: 113), Nisipeanu N. V. (III: 113), Palade C. (III: 113), Pandele M. Şt. (III: 113), Pitis N. (III: 113), Poiana G. T. (III: 113), Pojogeanu I. M. (III: 112, 7), Poparţac N. (III: 113, 31), Popescu Al. (III: 113), Popescu G. M. (III: 113, 4), Rădulescu M. C. (III: 109, 13), Simionescu P. (III: 113), Stănculescu G. (III: 113, 3, 4), Stănescu J. I. (III: 113), Toacscu V. N. (III: 112, 3, 4), Trandafir G. M. (III: 113), Vârtejeanu G. (III: 112, 3, 4), Velican A. (III: 113).

Clasa IV-a: Berbeian T. Al. (IV: 488), Jurist G. V. (IV: 480), Mităchescu C. P. (IV: 480), Moscu Th. (IV: 480), Partă P. (IV: 480), Roşu M. (IV: 480), Tănăsescu C. (IV: 480).

Clasa V-a: Atanasescu S. (V: 582, 4, 5), Anastasescu I. Al. (V: 571, 82, 4, 5), Barbini A. I. (V: 580, 4), Brătăşanu C. (V: 571, 84), Bunescu N. G. (V: 584), Borş I. I. (V: 584), Columbeanu D. S. (V: 571, 84), Ceauşelu E. (V: 575, 82, 4, 5), Cristescu P. C. (V. 584), Doganski I. (V: 569), Dobriceanu A. (V: 571, 82, 4, 5), Dimitriu D. (V: 584), Drăgulescu V. D. (V: 571, 82, 4, 5), Filipescu T. M. (V: 584), Gheorghiu M. (V: 575, 82, 4, 5), Ionescu-Berechet N. F. (V: 571), Iordănescu P. (V: 571, 82, 4, 5), Moldovan V. (V: 575, 82, 4, 5), Mihuţu T. G. (V: 575, 82, 4, 5), Neagu M. (V: 575, 82, 4, 5), Nicolaie C. Al. (V: 567, 75, 82, 4, 5), Nogacevski I. (V: 571, 5, 80, 2, 4, 5), Pârligras (V: 575, 82, 5), Petrescu Şt. (V: 571, 5, 82, 4, 5), Popa I. M. (V: 571, 84), Popescu I. D. (V: 582, 4, 5), Rădulescu S. V. (V: 584), Săveanu G. I. (V: 575, 80, 2, 4, 5), Stoianovici Ş. (V: 571, 2, 5, 8, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5), Stroie R. G. (V: 582, 4, 5), Tinculescu N. (V: 575, 80, 2, 4), Vieceli Al. (V: 582, 4, 5), Vitănescu C. (V: 585), Vlădoianu T. R. (V: 575, 80, 2, 4).

Clasa VI-a: Urseanu M. (VI: 461).

Clasa VII-a: Pruncu N. (VII: 477).

Clasa VIII-a: Bârlea Suhăţeanu G. V. (VII: 475), Stoenescu D. M. (VIII: 372, 5, 8, 83*, 7 T. c.: 276).

Liceul militar Târgu-Mureş.

Clasa III-a: Dumitrescu T. I. (III: 128), Perişoară C. N. (III: 128), Todirică V. N. (III: 118), Vineşi Coman (III: 128).

Clasa IV-a: Blăjan (IV: 480, 1, 3, 9), Mihalcu I. I. (IV: 481, 3).

Clasa V-a: Boariu I. I. (V: 568), Ionescu M. (V: 573, 80, 2, 3) Ionescu C. A. (V: 568), Jugulescu G. C. (V: 568), Marian M. D. (V: 563, 8), Maturcă G. F. (V: 568, 84), Moga S. N. (V: 568), Miclea N. (V: 571, 4, 82, 3, 4), Mihalache M. (V: 573), Petrescu I. I. C. (V: 568), Sichitiu I. (V: 573), Zagaican Vl. (V: 584).

Clasa VI-a: Hrisafi J. (VI: 554).

Clasa VII-a: Costin Alexe (VII: 480).

Clasa VIII-a: Topalescu Gh. (T. c.: 271).

Liceul „Diaconovici Loga" Timişoara.

Clasa IV-a: Iacob Iosif (IV: 470, 81, 4).

Clasa VII-a: Bakonyi C. (VII: 489, 95 8, 500, 1, T. c.: 271, 4, 5, 9, 80), Boleanţu L. (VII: 483).

Liceul „Sf. Haralambie" Turnu-Măgurele.

Clasa V-a: Tănăsescu G. N. (V: 567).

Clasa VIII-a: Stoya D. M. (VIII: 360, 1).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa VI-a: Filipa G. G. (VI: 550, 64, 5, 7, 2, 5).

Clasa VII-a: Genge I. M. (VII: 461, 75).

Liceul „Kogălniceanu" Vaslui.

Clasa VIII-a: Lupu I. I. (VIII: 360).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Septemvrie 1940

Clasa III-a. *Exerc. 137.* Un triunghiu ABC are $\overline{AB} = \frac{5}{7}$, $\overline{AC} = \frac{5}{6}$ şi înălţimea care pleacă din vârful A egală cu $\frac{3}{8}$. Să se calculeze perimetrul triunghiului format de piciorul înălţimii şi de mijloacele laturilor date.

C. I. B.

III. 138. Să construiți un trapez ABCD (AD ∥ BC) la care sunt date *baza mare* BC și *latura neparalelă* AB ca *mărime* și *poziție*, știind încă pe lângă acestea că, dacă uniți mijlocul M al laturei CD cu extremitățile laturei AB, unghiul obținut AMB este drept.

Cum trebue să fie dată $\overline{BC}$ față cu $\overline{AB}$ pentru ca să puteți construi un trapez propriu zis?

In ce caz trapezul se reduce la un triunghiu?

O. N. Ț.

III. 139. In problema precedentă, știind că $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm, să calculați baza mică a trapezului construit. Știind încă că unghiul ABC, pe care îl face latura AB cu baza BC, are ca măsură 60^0, să calculați *înălțimea* trapezului și apoi *suprafața* lui.

Calculați în acest caz și a patra latură a trapezului construit.

Pe latura CD, în cazul general, mai există un punct P astfel că unghiul APB este unghiu drept.

Calculați la ce distanță de punctul M se găsește punctul P.

O. N. Ț.

III. 140. Fie rombul ABCD. Diagonalele AC și BD se taie în punctul O și au lungimile 20 mm și 16 mm respectiv. Cercul descris pe $\overline{AB}$ ca diametru taie pe CB în A_1, iar pe AD in B_2; cercul descris pe $\overline{BC}$ ca diametru taie pe AB în C_2, iar CD în B_1; cercul descris pe $\overline{CD}$ ca diametru taie pe DA în C_1, iar pe CB în D_2; cercul descris pe DA ca diametru taie pe CD în A_2, iar pe AB în D_1.

a) Să se arate, că:

1^0. Punctele A_1, C_2, C, C_1, A_2, A sunt pe un același cerc.

2^0. Punctele B, D_2, B_1, D, B_2, D_1 sunt deasemenea pe un același cerc concentric cu primul.

3^0. Dreptele A_1A_2 și D_1B_2 sunt echidistante de mijlocul segmentului AO.

4^0. Dreptele AA_1 și DD_2 sunt tangente cercului de diametru $\overline{AD}$; etc.

b) Să se calculeze ariile celor două exagoane $AA_1C_2CC_1A_2$ și $BD_2B_1DB_2D_1$.

c) T fiind punctul unde DD_2 taie pe AB, să se calculeze lungimea segmentului $\overline{TD}$.

(Faceţi figura mare şi clară).

O. N. Ţ.

III. 141. Se dau trei segmente de dreaptă *a*, *b*, *c*. Să se construiască cu rigla negradată şi cu compasul un segment egal cu:

$$\frac{a \times b}{c} + \sqrt{a \times b} + \frac{c^2}{b}.$$

C. I. B.

Clasa IV-a. *Exerc. 503.* Un velodrom are două piste circulare concentrice cu razele R, *r* şi două piste circulare — tangente interioare în punctele diametral opuse A, B pistei mari şi tangente exterioare celei mici în punctele C, D. Doi biciclişti pleacă în acelaşi moment din A şi ajung în acelaşi moment în B: primul pe pista cu diametrul $\overline{AB}$, al doilea pe semicercurile AC, CD, DB. Viteza acestuia este *v*. Să se afle:

a) Unde se afla primul ciclist când al doilea a ajuns în C;

b) In cât timp primul ciclist ar străbate pista de diametru $\overline{CD}$?

C. I. B.

IV. 504. Două pendule, care sunt puse în mişcare la ora 10, arată ambele ora 10. După un interval de timp se observă că prima pendulă a rămas în urmă cu 2 minute, plus un sfert de interval, pe când a doua pendulă a înaintat cu 3 minute plus o treime din acel interval. La ora 17, arătată de a doua pendulă, diferenţa orelor arătate de ele întrecea diferenţa orelor arătate de ele la ora 15, arătată de prima pendulă, cu 34 minute. Să se spună:

1°. In cât timp prima pendulă întârzie cu 13 minute?

2°. Care era ora adevărată, când a doua pendulă a arătat ora 12?

O. N. Ţ.

IV. 505. Intr'un con circular drept cu raza R = 12 cm şi înălţimea $h = 5$ cm este înscrisă o sferă O şi un cilindru circular drept tangent sferei. Să se calculeze:

1°. Volumul şi suprafaţa laterală a conului circular drept având vârful în centrul O al sferei, iar ca bază cercul de intersecţie al suprafeţei cilindrului cu suprafaţa conului dat;

2°. Volumul interior *conului* şi exterior *sferii şi cilindrului.*

O. N. Ţ.

IV. 506. In piramida SABC, baza ABC şi faţa laterală SAC sunt triunghiuri echilaterale, iar vârful S se proiectează în mijlocul M al înălţimii corespunzătoare muchii $\overline{AC}$.

Să se calculeze, ştiind că lungimea laturei bazei este a:

1°. Aria laterală şi volumul piramidei SABC;

2°. Lungimile celor trei muchii laterale;

3°. Înălţimile feţelor laterale.

Să se calculeze apoi aria trunchiului de piramidă obţinut când tăiem piramida cu un plan perpendicular pe înălţimea $\overline{SI}$ a piramidei şi trecând prin mijlocul ei.

O. N. Ţ.

IV. 507. Se dă paralelipipedul dreptunghiu ABCDEFGH. Fie O mijlocul diagonalei $\overline{BG}$ a feţei laterale BFGC şi I punctul unde dreapta DO înţeapă planul bazei EFGH. *Dacă* $\overline{AB} = 15$ cm; $\overline{AD} = 20$ cm; $\overline{AE} = 60$ cm, să se calculeze volumul piramidei cu vârful în punctul I şi baza DEG. Asemenea să se calculeze aria laterală a piramidei EDIG.

O. N. Ţ.

IV. 508. Să se rezolve ecuaţia:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) - (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 0.$$

Aplicaţie $a = b$, $c = d$.

C. I. Ţ.

IV. 509. Se dau două cercuri de raze 5, 4. Distanţa centrelor este 12. Fie T, T' punctele de contact ale cercurilor cu tangenta lor comună ce taie dreapta centrelor între centre în A. Să se afle lungimile segmentelor $\overline{AT}$, $\overline{AT'}$.

C. I. B.

Clasa V-a. *Exerc. 599.* Suma diagonalei, lungimii şi lăţimii unui dreptunghiu este a, iar diferenţa dintre lungime şi lăţime este b. Să se afle aria dreptunghiului. C. I. B.

V. 560. La vânzarea aparatelor de radio fiscul percepe un impozit de $6^0/_0$ şi altul de $2^0/_0$. La repararea aparatelor se percepe numai un impozit de $3^0/_0$. Ştiind că un negustor a plătit drept impozite 13.500 lei şi cunoscând că reparaţiile reprezintă o treime din totalul vânzărilor, să se afle cât a încasat acel negustor din vânzarea aparatelor şi cât din reparaţiuni.

A. A. R.

V. 561. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}+x}-\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}-x}=\sqrt{2\sqrt{1-x^2}}.$$

C. I. Ţ.

V. 562. Un trunchiu de con circular drept este astfel că secţiunea trecând prin axa lui este un trapez cu diagonalele perpendiculare şi cu perimetrul egal cu $2p$. Să se determine acest trunchiu de con astfel încât suprafaţa sa totală să fie egală cu πa^2. Discuţie.

O. N. Ţ.

V. 563. Să se construiască trapezul ABCD ştiind că: *a)* lungimea lui $\overline{AB}$ este $2l$; *b)* unghiul ABC, pe care latura AB îl face cu baza mare BC, are ca măsură 60^0; *c)* cercul O descrise pe latura AB ca diametru trece prin M mijlocul bazei BC şi este tangent în T laturei CD. Să se calculeze:

1^0. Perimetrul şi aria trapezului ABCD;

2^0. Asemenea perimetrul şi aria trapezului MCDN, punctul N fiind unde cercul O taie a doua oară baza AD.

O. N. Ţ.

V. 564. Se consideră un trapez oarecare ABCD ($AD \parallel BC$) circumscris unui cerc (O). Să se arate că, dacă latura CD a trapezului variază rămânând tangentă cercului (O), cercul (N) descris pe $\overline{CD}$ ca diametru *trece printr'un punct fix.* Care este poziţia laturei CD pentru care aria trapezului ABCD este cea mai mică posibilă.

O. N. Ţ.

V. 565. Fie Δ_1 şi Δ_2 două drepte date perpendiculare una pe alta şi două lungimi date a şi b. Putem construi nenumărate trapeze

ABCD având bazele $\overline{AD}$ şi $\overline{BC}$ respectiv egale cu a şi b, iar diagonalele $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$ aşezate pe Δ_1 şi Δ_2.

Să se construiască trapezul ABCD de arie maximă.

O. N. Ţ.

V. 566. Să se construiască un trapez cunoscându-i *baza mare* şi *înălţimea*, ştiind că triunghiul format de diagonalele lui cu una din baze este asemenea cu triunghiul format de laturile neparalele cu cealaltă bază. Să se calculeze apoi *perimetrul* şi *aria trapezului.*

O. N. Ţ.

V. 567. Să se rezolve sistemul:

$$x + xy + y = a$$
$$x^2 + x^2y^2 + y^2 = b.$$

V. Gh.

V. 568. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$x^2 + \left(a - \frac{3}{2}\right) x + \left(b + \frac{5}{16} - \frac{a}{4}\right) = 0.$$

Gh. B.

V. 569. Să se calculeze raportul catetelor triunghiurilor dreptunghice care satisfac relaţia:

$$a^2 - 4ah + h^2 = 0$$

a fiind ipotenuza, iar h înălţimea.

G. D. S.

V. 570. Să se rezolve ecuaţiile

$$\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y} = \sqrt{4-y^2}$$
$$\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y} = \sqrt{4-y^2}$$

şi să se verifice soluţiile aflate.

C. I. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 588.* Fie A', A" punctele în care tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC taie dreapta BC şi perpendiculara ridicată în C pe BC.

a) Să se calculeze lungimea A'A" cu elementele triunghiului ABC.

b) Să se exprime cu aceleaşi elemente raportul ariilor AA'B, AA"C.

C. I. B.

VI. 589. Un corp geometric este format dintr'un trunchiu de con terminat cu emisfere având aceleaşi raze R şi r ca şi bazele respective. Volumul acestui corp geometric este:

$$V = \frac{4\pi}{3}(R + r)(R^2 + r^2).$$

1°. Să se calculeze înălţimea trunchiului de con.

2°. Să se calculeze raza secţiunii (paralelă cu bazele trunchiului de con) care împarte solidul în două părţi de egal volum.

G. D. S.

VI. 590. Să se rezolve un trapez dreptunghiu ABCD (A unghiu drept) cunoscând baza mare $\overline{AB}$, unghiul ascuţit B şi suprafaţa lui S. Aplicaţie numerică:

$$\overline{AB} = 223{,}45 \text{ m} \quad ; \quad \sphericalangle B = 56^0 14' 10'' \quad , \quad S = 16\,200 \text{ m}^2.$$

V. Gh.

VI. 591. Intr'o sferă (O) de centru O şi rază *unu*, fie: $\overline{AA'}$ un diametru; I mijlocul razei $\overline{OA'}$; C mijlocul razei $\overline{OA}$; (BB') cercul sferei perpendicular pe AA' în C; cercul (EE'), după care planul tangent la sferă în A taie conul cu vârful în I şi baza (BB'); cercul (FF'), după care acest con la rândul lui taie a doua oară sfera O; cercul (LL'), după care conul cu vârful în A' şi baza (EE') taie sfera (O). Să se calculeze:

1°. Volumele şi suprafeţele trunchiurilor de con determinate de cercul (EE'), din planul tangent cu fiecare din cercurile considerate pe sferă;

2°. Suprafaţa zonei determinată pe sfera O de cercurile (FF') şi (LL').

O. N. Ţ.

VI. 592. Se dă un con circular drept cu generatoarea de lungimea a, iar unghiul de deschidere (al generatoarei cu axa) egal cu α.

Fie I centrul sferei înscrise în conul dat; (MN) cercul după care sfera (I) este tangentă conului dat; (PQ) cercul după care

cilindrul circular drept, cu aceeaşi axă şi tangent sferei, taie conul dat. Să se determine unghiul α:

1°. Astfel încât cercul (MN) să fie cercul median al conului dat;

2°. Astfel încât cercul (PQ) să fie cercul median al conului dat. Să se calculeze apoi în ambele cazuri:

a) Volumul şi suprafaţa laterală a conului cu vârful în I şi cercul de bază MN;

b) Volumul şi suprafaţa laterală a trunchiului de con determinat de cercurile (MN) şi (PQ).

O. N. Ţ.

VI. 593. In piramida SABC, baza ABC şi faţa SAC sunt triunghiuri echilaterale, iar vârful S se proiectează în mijlocul înălţimii bazei corespunzătoare muchii AC. Să se calculeze:

1°. Aria laterală şi volumul piramidei SABC în funcţie de latura bazei.

2°. Lungimile celor trei muchii laterale.

3°. Unghiurile pe care cele trei feţe laterale le fac cu planul bazei. Să se determine apoi poziţia secţiunii, paralelă cu baza, pentru care aria laterală a trunchiului de piramidă obţinut să fie egală cu aria laterală a piramidei tăiate.

O. N. Ţ.

VI. 594. Intr'o sferă O de rază *unu* este dat un diametru AB şi un punct C pe raza OB. Conul circular drept cu vârful în C, cu axa CA şi care dă în planul, tangent în A la sferă, un cerc egal cu cercul mare al sferei, intersectează sfera după două cercuri paralele (D) şi (E). Să se calculeze:

1°. *Aria laterală* şi *volumul* trunchiului de con înscris sferei care are ca baze cercurile (D) şi (E).

2°. Unghiul de deschidere al conului din care a fost tăiat trunchiul de con precedent.

O. N. Ţ.

VI. 595. Se consideră paralelipipedul dreptunghiu ABCDEFGH. Fie O mijlocul diagonalei BG a feţei BFGC şi I punctul unde dreapta DO înţeapă planul bazei EFGH; $\overline{AB} = a$; $\overline{AD} = b$; $\overline{AE} = c$. Să se calculeze:

1°. Volumul piramidei cu vârful în punctul I şi baza DEG;

2°. Aria totală a piramidei DEIG;

3°. Măsura feţelor triedrului format de cele trei diagonale ale paralelipipedului dat;

4°. Unghiurile pe care le face BG cu fiecare din dreptele AC, AF, DE.

Aplicaţie:

$$a = 6 \text{ cm} \quad ; \quad b = 8 \text{ cm} \quad ; \quad c = 24 \text{ cm}.$$

O. N. Ţ.

VI. 596. Pe latura AB a triunghiului ABC se ia un punct C' aşa încât:

$$\overline{AC'} = \overline{AC}.$$

Cercul, cu centru în C' şi cu raza $\overline{C'A}$, taie pe BC în C_1. Să se calculeze laturile şi unghiurile triunghiului $BC'C_1$ în funcţie de laturile şi unghiurile triunghiului ABC.

GH. B.

VI. 597. Pe ipotenuza $\overline{BC}$ a triunghiului dreptunghic ABC se iau punctele D, E dela B către C. Să notăm unghiurile

$$\widehat{BAD} \ , \ \widehat{DAE} \text{ şi } \widehat{EAC}$$

respectiv cu α, β, γ, iar segmentele $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$ cu x, y, z. Se cere:

1°. Să se arate că $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{bcy}{b^2x + c^2z - azx}$, iar dacă $x=z=k$, atunci $\operatorname{tg}\beta = h\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{a-k}\right)$, h fiind înălţimea.

2°. Să se găsească relaţia între x, y, z astfel încât $\operatorname{tg}\beta$ să fie *medie armonică* între $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\operatorname{tg}\gamma$. Intre ce limite poate varia y?

G. D. S.

Clasa VII-a. *Exerc. 510.* Să se cerceteze dacă funcţia:

$$f(x, y, z) \equiv \arcsin\frac{x-y}{x+y} + \arcsin\frac{y-z}{y+z} + \arcsin\frac{z-x}{z+x}$$

este omogenă şi în acest caz să se verifice relaţia lui EULER.

G. D. S.

VII. 511. Să se studieze seria cu termenul general

$$u_n = \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n}{n+a}}.$$

G. G. C.

VII. 512. Un mobil M se mişcă uniform pe un cerc de rază R şi centru O, parcurgându-l în timpul T.

A fiind poziţia lui M la momentul iniţial şi ABCD un patrat înscris în cerc, iar N intersecţia lui OM cu latura patratului corespunzătoare arcului pe care se află M, să se scrie ecuaţia mişcării lui N pe AB, BC, CD, DA origina spaţiilor fiind respectiv A, B, C, D.

C. I. B.

VII. 513. Se dau două puncte fixe A şi B în plan şi o dreaptă Δ paralelă la AB. Să se găsească pe dreapta Δ poziţia punctului M pentru care produsul distanţelor $\overline{MA}$ şi $\overline{MB}$ este cel mai mic. (Se va lua ca variabilă unghiul AMB). Discuţie complectă.

O. N. Ţ.

VII. 514. Se dă un cerc O şi un punct A exterior cercului. Pe diametrul AO şi exterior cercului O se mişcă un punct I. Tangentele IT şi IP la cercul O întâlnesc tangentele AB şi AC, la acelaşi cerc O, respectiv în punctele M şi N.

Să se calculeze aria patrulaterului AMIN circumscris cercului O.

Caz particular: $\operatorname{tg}\frac{\widehat{OAC}}{2} = \frac{1}{2}$.

O. N. Ţ.

VII. 515. Să se calculeze determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(\cos B - \cos C) & -c(1+\cos A) & b(1+\cos A) \\ c(1+\cos C) & b(\cos C - \cos A) & -a(1+\cos B) \\ -b(1+\cos C) & a(1+\cos C) & c(\cos A - \cos B) \end{vmatrix}$$

unde a, b, c şi A, B, C sunt laturile şi unghiurile unui triunghiu.

G. D. S.

VII. 516. Două mobile M şi N pornesc în acelaşi timp: primul pe o orizontală, cu mişcare uniform variată, al doilea în cădere liberă dela înălţimea h deasupra acestei orizontalei. Cunoscând acceleraţia γ şi iuţeala iniţială v_0 a lui M şi ştiind că mobilele M şi N se întâlnesc, să se afle:

1°. Spaţiul parcurs de mobilul M dela pornire până în momentul întâlnirii cu N.

2°. Unghiul făcut de dreapta MN cu orizontala în momentul când iuţelile lor sunt egale.

Aplicaţie. $\gamma = 4{,}81$ m/sec^2, $v_0 = 40$ m/sec, $h = 78{,}48$ m. (Se va lua $g = 9{,}81$).

G. D. S.

VII. 517. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} + \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$$

a) fără ajutorul derivatelor, *b)* cu ajutorul derivatelor.

C. I. Ţ.

VII. 518. Se dau punctele A, B şi cercul (C). Să se studieze variaţia ariei trapezului ABDE, D şi E fiind puncte situate pe cercul (C).

C. I. B.

Clasa VIII-a. *Exerc. 398.* Să se determine parametrul λ şi să se rezolve ecuaţia:

$$x^4 + \lambda x^3 + (\lambda - 3)\, x^2 - \lambda x + 1 = 0,$$

ştiind că media aritmetică a două rădăcini este egală cu suma inverselor celorlalte două.

G. D. S.

VIII. 399. Să se rezolve ecuaţia:

$$2\cos 3x + \cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{5}.$$

C. I. Ţ.

VIII. 400. Să se determine condiţia necesară ca o ecuaţie de gradul *şase* să fie astfel încât rădăcinile sale să satisfacă două câte două o aceeaşi relaţie de involuţie.

Să se arate că în acest caz ecuaţia este reductibilă la una de gradul al treilea.

G. G. C.

VIII. 401. Parabola $y^2 - 2bx = 0$ întâlneşte elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^1} - 1 = 0$$

în punctele B_1, B_2, iar parabola $x^2 - 2ay = 0$ întâlneşte aceeaşi elipsă în A_1, A_2. Fie P unul din punctele comune parabolelor. Să se scrie ecuaţia conicei $A_1A_2B_1A_2P$.

C. I. B.

VIII. 402. Se dau două drepte Δ_1 şi Δ_2. Fie punctele A şi B pe Δ_1 şi C pe Δ_2. Să se afle locul geometric al *ortocentrului* triunghiului ABC, când C se mişcă pe dreapta Δ_2.

E. M.

VIII. 403. Un trunchiu de con circular drept are secțiunea ce trece prin axa lui un trapez cu diagonalele perpendiculare și cu perimetrul egal cu $2p$. Să se determine acest trunchiu de con astfel ca volumul său să fie egal cu πa^3. Să se determine relația dintre a și p pentru ca problema să fie posibilă.

O. N. Ț.

VIII. 404. Un trunchiu de con circular drept are secțiunea ce trece prin axa lui un trapez cu diagonalele perpendiculare. Să se determine acest trunchiu de con astfel ca *suprafața sa totală* să fie πa^2, iar *volumul său* să fie πb^3. Să se arate că problema are totdeauna cel puțin o soluție. Să se examineze apoi cazul $b = a$.

O. N. Ț.

VIII. 405. O bară rigidă și grea AOB ($\overline{OA} = \overline{OB} = l$) de densitate δ, secțiunea s, este îndoită formând unghiul $AOB = \alpha$. Această bară este atârnată de capătul A putându-se roti într'un plan vertical. Să se calculeze forța X, verticală, care aplicată în B, face ca bara în poziția de echilibru să aibă brațul OB orizontal. Să se calculeze și presiunea Y asupra punctului fix A. Frecări nu sunt.

Caz particular:

$$l = 5 \text{ dm}; \quad \delta = 7{,}8; \quad s = 1 \text{ cm}^2; \quad \alpha = 60^0.$$

V. Gh.

VIII. 406. Să se scrie ecuațiile a două cercuri de raze date, unul tangent interior, cellalt tangent exterior unui cerc dat, luând ca axe doi diametri perpendiculari ai acestui din urmă cerc.

Gh. B.

VIII. 407. 1°. Să se găsească ecuațiile cercurilor C_1 și C_2, tangente axei Ox și parabolei $y^2 - 2px = 0$ în punctul A de ordonată $y = \frac{4}{3}p$. (C_1 exterior, iar C_2 interior parabolei).

2^0. Să se afle locul geometric al intersecției polarelor unui punct, mobil pe axa Ox, față de cercul C_1 și de parabola dată.

3^0. O secantă variabilă ce trece prin A taie din nou parabola în punctul M, iar cercul C_2 în N.

a) Să se arate că tangentele în M și N la curbele respective nu pot fi paralele, dacă nu coincid.

b) Să se calculeze cu două zecimale exacte coeficientul unghiular al secantei, astfel încât tangentele în M și N la curbele respective să fie perpendiculare.

G. D. S.

Toate clasele. *Exerc. 290.* Dacă n (N) și φ (N) reprezintă numărul divizorilor lui N și numărul numerelor prime cu N și mai mici ca el, atunci, să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = n[\varphi(1940)] + \varphi[n(1940)].$$

I. L.

T. C. 291. Să se arate că nu este nici un număr de 3 cifre, care înmulțit cu 6 să dea la produs inversatul lui.

Gh. B.

T. C. 292. Să se arate că expresia:

$$E = n(n-1)(3n^2 - 11n + 1)$$

este divizibilă cu 168, n fiind un patrat perfect.

C. I. Ț.

T. C. 293. Să se arate că expresiunea:

$$E = 2^{\alpha+1} + 3^{\alpha}$$

reprezintă foarte multe numere prime când α este întreg și pozitiv.

I. L.

T. C. 294. Suma cuburilor primelor $(n-1)$ numere impare poate să fie egală cu cubul lui n?

I. L.

T. C. 295. Dacă N este un număr perfect par, atunci diferența între el și dublul indicatorului lui este o putere a lui 2.

I. L.

T. C. 296. Să se arate că dacă N este un număr perfect par de forma $2^m(2^{m+1}-1)$ și dacă $\varphi_n(N)$ reprezintă indicatorul de ordinul n a lui N, atunci avem:

$$\varphi_n(N) \times \varphi_n\left(\frac{N}{2^m}\right) = \varphi_{n-1}\left(\frac{N}{2^m}\right) \times \varphi_{n+1}(N).$$

I. L.

T. C. 297. Care este expresiunea produsului numerelor prime cu un număr perfect par și inferior lui?

I. L.

ERATĂ. La Exerc. VIII. 382 se va îndrepta $l = 1$ cm (în loc de $l = 10$ m).

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuș, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se vor scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».